

自然科学基础系列教材



工科大学数学教程

线性代数与空间解析几何

郑宝东 主编

邓廷权 曲中宪 蔡吉花 副主编



哈尔滨工业大学出版社

自然科学基础系列教材

工 科 大 学 数 学 教 程

线性代数与空间解析几何

郑宝东　主　编

邓廷权　曲中宪
蔡吉花　　　　　副主编

哈尔滨工业大学出版社
哈 尔 滨

内 容 简 介

本书是在多年教学改革的基础上产生的.它将线性代数与空间解析几何合理地结合起来.在保持两部分内容完整存在的基础上,加强相互呼应、联系和渗透.内容包括行列式、矩阵、向量、线性方程组、特征值、特征向量、相似矩阵、二次型、平面、直线、空间曲面与曲线等内容.每章后均配有一定数量习题.书后配有综合练习100题.

本书可作为工科大学本科生数学课教材,也可作为硕士研究生入学考试的参考书.

线性代数与空间解析几何
Xianxingdaishu Yu Kongjianjiexijihe
郑宝东 主 编
*
哈尔滨工业大学出版社出版发行
哈 尔 滨 工 业 大 学 印 刷 厂 印 刷
*
开本 787×1092 1/16 印张 13.5 字数 310 千字
2000年5月第1版 2000年5月第1次印刷
印数 1~6 000
ISBN 7-5603-1529-1/O・107 定价 17.00元

前　言

培养基础扎实、勇于创新型人才，历来是大学教育的一个重要目标. 随着知识经济时代的到来，这一目标显得更加突出. 在工科大学教育中，数学课既是基础理论课程，又在培养学生抽象思维能力、逻辑推理能力、空间想象能力和科学计算能力诸方面起着特殊重要的作用. 为适应培养 21 世纪工程技术人才对数学的要求，我们按照原国家教委关于系列课程改革的精神，多年来在数学教学改革方面进行了探索，取得一定的成效. 在此基础上，编写了这套教材，其中包括：工科数学分析(上下册)，线性代数与空间解析几何，概率论与数理统计，计算方法，数学实验. 这套教材是参照原国家教委 1995 年颁布的高等工业学校本科各门数学课程教学基本要求和 1997 年研究生入学考试大纲编写的. 为满足不同专业、不同层次学生的需要，这套教材适当增加了部分内容，对学生能力的要求也有所提高.

本教材的编写力求具有以下特色：

1. 将各门课程的内容有机结合、融汇贯通，既保证了教学质量的提高，又压缩了教学时数.

2. 重视对学生能力的培养，注意提高学生基本素质. 对基本概念、理论、思想方法的阐述准确、简洁、透彻、深入. 取材上，精选内容，突出重点，强调应用，注意奠定学生创新能力的基础.

3. 例题和习题丰富，特别是综合性和实际应用性的题较多，有利于学生掌握所学内容，提高分析问题和解决问题的能力.

4. 以简介和附录的形式为学生展望新知识留下窗口，以开阔学生的视野，为进一步拓宽数学知识指出方向.

本教材主要由哈尔滨工业大学数学系各教研室教师编写. 东北电力学院，黑龙江科技学院，鞍山师范学院，大庆石油学院等学校的教师参加了部分章节的编写工作. 哈尔滨工业大学数学系富景隆、杨克劭、曹彬、戚振开、薛小平五位教授分别审阅了教材的各部分内容，提出了许多宝贵意见.

由于编者水平有限，教材中缺点和疏漏在所难免，恳请读者批评指正.

哈尔滨工业大学工科数学教材编写委员会

2000 年 5 月

目　录

第一章　n阶行列式

在工程技术和科学研究中，有很多问题需要用到“行列式”这个数学工具. 本章主要讨论如下几个问题：

1. 行列式的定义；
2. 行列式的性质；
3. 行列式的计算；
4. 克莱姆(Cramer)法则.

1.1　n阶行列式

1.1.1　全排列的逆序数、对换

为了给出n阶行列式的定义，首先介绍全排列的“逆序数”和全排列的“对换”.

把n个不同的元素排成一列，叫做这n个元素的**全排列**(简称**排列**). n个不同元素的排列共有n! 种. 例如，自然数1,2,3的排列共有六种：

1 2 3，1 3 2，2 1 3，2 3 1，3 1 2，3 2 1.

为了方便，今后把自然数$1,2,\cdots,n$视为n个不同的元素的代表. 用p_i表示这n个数中的一个$(i=1,2,\cdots,n)$，且当$i\neq j$时$p_i\neq p_j$，于是$p_1p_2p_3\cdots p_n$便是$1,2,\cdots,n$的一个排列. 对排列$p_1p_2\cdots p_n$，我们把排在p_i前面且比p_i大的数的个数t_i称为p_i的**逆序数**，把这个排列中各数的逆序数之和

$$t_1+t_2+\cdots+t_n$$

称为这个排列的**逆序数**. 记为$t(p_1p_2\cdots p_n)$.

逆序数为奇数的排列称为**奇排列**；逆序数为偶数的排列称为**偶排列**. 显然，排列$12\cdots n$的逆序数为0，故它是偶排列. 今后，称此排列为**自然排列**.

例1　求排列23514的逆序数.

解　在排列23514中，2的逆序数是0；3的逆序数是0；5的逆序数是0；1的逆序数是3；4的逆序数是1，故排列23514的逆序数

$$t(23514)=0+0+0+3+1=4.$$

在一个排列中，将某两个数的位置对调(其它数不动)的变动叫做一个**对换**. 两个相邻数的对换称为**相邻对换**.

定理1.1　一个排列中的任意两个数对换后，排列改变奇偶性.

证　先证相邻对换的情形.

设一个排列为$a_1a_2\cdots a_sabb_1b_2\cdots b_m$，对换$a$与$b$后，排列变为$a_1a_2\cdots a_sbab_1b_2\cdots b_m$. 显然，

经过此对换后，$a_1,a_2,\cdots,a_s,b_1,b_2,\cdots,b_m$ 的逆序数并不改变，而 a,b 两数的逆序数变为：当 $a<b$ 时，a 的逆序数增加 1，而 b 的逆序数不变；当 $a>b$ 时，a 的逆序数不变，而 b 的逆序数减少 1. 所以，排列 $a_1a_2\cdots a_sabb_1b_2\cdots b_m$ 与 $a_1a_2\cdots a_sbab_1b_2\cdots b_m$ 的奇偶性不同．

再证一般对换的情形．

对排列 $a_1\cdots a_sab_1\cdots b_mbc_1\cdots c_n$ 做 m 次相邻对换，变成 $a_1a_2\cdots a_sabb_1b_2\cdots b_mc_1\cdots c_n$，再做 $m+1$ 次相邻对换，变成 $a_1a_2\cdots a_sbb_1b_2\cdots b_mac_1c_2\cdots c_n$. 总之，经 $2m+1$ 次相邻对换，可以把排列 $a_1\cdots a_sab_1\cdots b_mbc_1\cdots c_n$ 变成排列 $a_1\cdots a_sbb_1\cdots b_mac_1c_2\cdots c_n$，所以，这两个排列的奇偶性相反. □

1.1.2 n 阶行列式的定义

行列式的概念来源于对线性方程组的研究．

设二元线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2,\end{cases}\tag{1}$$

其中 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$.

现在讨论方程组(1)的求解公式．对(1)作加减消元得

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1=b_1a_{22}-a_{12}b_2,$$

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_2=a_{11}b_2-b_1a_{21}.$$

由 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$，得

$$\begin{cases}x_1=\dfrac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}\\[2ex]x_2=\dfrac{a_{11}b_2-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}.\end{cases}\tag{2}$$

式(2)就是方程组(1)的求解公式．但式(2)不易记忆，因而有必要引进新的符号表示式(2).

设 $a_{11},a_{12},a_{21},a_{22}$ 是四个数，称代数和 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ 为二阶行列式，记作

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}.$$

称 $a_{ij}(i,j=1,2)$ 为这个行列式的元素．a_{ij} 的两个下角标 i,j 分别表示 a_{ij} 所在的行和列的序号．

对线性方程组(1)，记

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0,$$

$$D_1=\begin{vmatrix}b_1&a_{12}\\b_2&a_{22}\end{vmatrix}=b_1a_{22}-a_{12}b_2,$$

$$D_2=\begin{vmatrix}a_{11}&b_1\\a_{21}&b_2\end{vmatrix}=a_{11}b_2-b_1a_{21},$$

则式(2)可写成

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{D_1}{D} \\ x_2 = \dfrac{D_2}{D}. \end{cases}$$

例如,对线性方程组

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 = 1 \\ -x_1 + 2x_2 = 1. \end{cases}$$

由于

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \times 2 - 5 \times (-1) = 11 \neq 0,$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \times 2 - 5 \times 1 = -3,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \times 2 - 1 \times (-1) = 4.$$

所以

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{D_1}{D} = -\dfrac{3}{11} \\ x_2 = \dfrac{D_2}{D} = \dfrac{4}{11}. \end{cases}$$

为了得出关于三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases}$$

的类似解法,我们引入三阶行列式.称

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \tag{3}$$

为三阶行列式.

例如

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 3 \times 1 \times 0 + 0 \times 2 \times 2 + 4 \times 1 \times 1 - 3 \times 2 \times 1 - 0 \times 1 \times 0 - 4 \times 1 \times 2$$

$$= -10.$$

利用三阶行列式,可以把一类三元线性方程组的解表达成简洁的形式.例如,设方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases}$$

的系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0,$$

记

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix},$$

则该方程组的解为

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D},\quad x_3=\frac{D_3}{D}.$$

由三阶行列式的定义容易看出：

1. 式(3)等号后共有 3! 项．

2. 式(3)等号后的每一项恰是三个元素的乘积 $a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$. 如果将行指标按自然次序排成 123，则这三个元素的列指标排成 $p_1p_2p_3$，它是 1，2，3 的排列．因此，等号右边恰好是所有位于不同行、不同列的 3 个元素之积的代数和．

3. 式(3)等号后各项的正负号由列指标排列的奇偶性决定(此时行指标按自然次序排列)．对应的列指标的排列分别是 123，312，231 时，它们都是偶排列，取正号；对应的列指标的排列分别是 132，213，321 时，它们都是奇排列，取负号．

至此，可将行列式的概念推广到 n 阶．

定义 1.1 设 n^2 个数，排成 n 行 n 列的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{matrix} \qquad (4)$$

其中 a_{ij}是第 i 行第 j 列的数(称为元素)．每取由 1 至 n 的一个排列 $p_1p_2\cdots p_n$，做 n 个元素 $a_{1p_1}, a_{2p_2}, \cdots, a_{np_n}$的乘积，并冠以符号$(-1)^{t(p_1p_2\cdots p_n)}$，而得到一项

$$(-1)^{t(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n},$$

这样的项共有 $n!$ 个．称这 $n!$ 项的和为与表(4)相对应的 n 阶行列式，记作

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum(-1)^{t(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n},$$

其中“$\sum$”是对所有 n 阶排列 $p_1p_2p_3\cdots p_n$ 取和．也可把行列式简记作$\triangle(a_{ij})$.

因此，表(4)所对应的行列式是 $n!$ 项的代数和．这些项是一切可能的取自表(4)的不同行、不同列的 n 个元素的乘积．其一般项为 $a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$，当 $p_1p_2\cdots p_n$ 是个奇排列时，此项取负号；当 $p_1p_2\cdots p_n$ 是个偶排列时，此项取正号．

由定义可知

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21},$$

这与前面的定义是一致的．

当 $n=1$ 时，一阶行列式 $|a|=a$，不要与绝对值记号混淆．

显然，若行列式 D 的某行(列)的元素全是零，则一般项 $a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}=0$，故此行列式为零(参见推论 1.3).

例 2　证明四阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}.$$

证　这是一个四阶行列式，在展开式中应有 $4!=24$ 项．但在每项乘积 $a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}a_{4p_4}$ 中，只要有一个元素等于零，乘积就是零，所以只需计算乘积中不出现零的项．由于第 4 行中元素除了 a_{44} 外都是 0，故只须取 $p_4=4$，第 3 行元素除了 a_{33}，a_{34} 外都是 0，现已取 $p_4=4$，故只须取 $p_3=3$. 同理，只须取 $p_2=2$，$p_1=1$. 于是这个行列式的展开式中不为 0 的乘积只可能是 $a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$，而排列 1234 的逆序数是 0，所以这一项所带的符号是正的．因此，该行列式等于 $a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$.　▯

同理可以证明

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

这种主对角线(从左上角到右下角这条线)以下(上)的元素都是 0 的行列式，叫做上(下)三角行列式．类似地

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1,n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & 0 & 0 \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{t(n,n-1,\cdots,2,1)}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}.$$

在行列式的定义中，为方便，我们将 n 个元素的行指标按自然次序排列．事实上，数的乘法是可交换的，因而这 n 个元素的次序是可以任意排列的．一般地，n 阶行列式中的项可以写成

$$a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}. \tag{5}$$

其中 $i_1i_2\cdots i_n$ 和 $j_1j_2\cdots j_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的两个排列．利用定理 1.1 可以证明，n 阶行列式中，项(5)前面的符号等于

$$(-1)^{t(i_1i_2\cdots i_n)+t(j_1j_2\cdots j_n)}.$$

特别地，项 $a_{p_11}a_{p_22}\cdots a_{p_nn}$ 前面的符号等于 $(-1)^{t(p_1p_2\cdots p_n)}$．于是 n 阶行列式的定义又可以写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum(-1)^{t(p_1p_2\cdots p_n)}a_{p_11}a_{p_22}\cdots a_{p_nn}. \tag{6}$$

我们定义的行列式中的元素是数，事实上，可以将其推广成元素是某些其它数学对象的情形．例如，可以同样地定义元素是多项式的行列式．

1.2　n 阶行列式的性质

设

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

记

$$D'=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

即 D' 是这样得到的：把 D 中第 i 行作为 D' 的第 i 列．这就是说 D' 的第 i 行第 j 列处的元素恰为 D 的第 j 行第 i 列处的元素．

称 D' 为行列式 D 的转置行列式．

性质 1.1 行列式与它的转置行列式相等．

证 记 $b_{ij}=a_{ji}, i,j=1,2,\cdots,n$，则由式(6)可得

$$
\begin{aligned}
D' &= \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} \\
&= \sum (-1)^{t(p_1p_2\cdots p_n)} b_{1p_1}b_{2p_2}\cdots b_{np_n} \\
&= \sum (-1)^{t(p_1p_2\cdots p_n)} a_{p_11}a_{p_22}\cdots a_{p_nn} \\
&= D.
\end{aligned}
$$

性质 1.1 表明，对于行列式而言，关于"行"成立的性质，对于"列"也同样成立，反之亦然．

性质 1.2 互换行列式的两行(列)，行列式变号．

证 设行列式

$$
D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \qquad D_1=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}.
$$

其中 D_1 是交换 D 的 i,j 两行得到的，即当 $k\neq i,j$ 时，$b_{kp}=a_{kp}$；而 $b_{jp}=a_{ip}, b_{ip}=a_{jp}$．于是(不妨设 $i<j$)

$$
\begin{aligned}
D_1 &= \sum (-1)^{t(p_1p_2\cdots p_n)} b_{1p_1}b_{2p_2}\cdots b_{ip_i}\cdots b_{jp_j}\cdots b_{np_n} \\
&= \sum (-1)^{t(p_1\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n)} a_{1p_1}\cdots a_{jp_i}\cdots a_{ip_j}\cdots a_{np_n} \\
&= \sum (-1)^{t(p_1\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n)} a_{1p_1}\cdots a_{ip_j}\cdots a_{jp_i}\cdots a_{np_n}.
\end{aligned}
$$

其中 $12\cdots i\cdots j\cdots n$ 为自然排列，由定理 1.1 知

$$
(-1)^{t(p_1\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n)} = -(-1)^{t(p_1\cdots p_j\cdots p_i\cdots p_n)},
$$

故 $\quad D_1=-\sum (-1)^{t(p_1\cdots p_j\cdots p_i\cdots p_n)} a_{1p_1}\cdots a_{ip_j}\cdots a_{jp_i}\cdots a_{np_n}=-D.$ □

推论 1.1 如果行列式有两行(列)完全相同，则此行列式为零．

性质 1.3

$$
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.
$$

这就是说，行列式一行的公因子可以提出去，或者说以一数 k 乘行列式的一行就相当于用

这个数乘此行列式.

证 由行列式的定义知

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\sum(-1)^{t(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}\cdots a_{i-1p_{i-1}}(ka_{ip_i})a_{i+1p_{i+1}}\cdots a_{np_n}$$

$$=k\sum(-1)^{t(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$$

$$=k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

推论 1.2 若行列式中有两行(列)元素成比例,则行列式等于零.

推论 1.3 若行列式中有零行(列)则此行列式为零.

性质 1.4

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1}+a'_{i1} & a_{i2}+a'_{i2} & \cdots & a_{in}+a'_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a'_{i1} & a'_{i2} & \cdots & a'_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

这就是说,如果行列式的某一行是两项和的形式,那么这个行列式就等于两个行列式的和.而这两个行列式除这一行以外与原来行列式完全相同.

利用行列式的定义,不难给出性质 1.4 的证明,请读者证明之(参考性质 1.3 的证明).

性质 1.5

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1}+ka_{i1} & a_{j2}+ka_{i2} & \cdots & a_{jn}+ka_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

这就是说把行列式某一行的倍数加到另一行，行列式不变.

利用性质 1.4 及推论 1.2 可得性质 1.5 的证明.

性质 1.3、性质 1.4 和性质 1.5 都是对"行"叙述的，由性质 1.1 知，性质 1.3、性质 1.4 和性质 1.5 关于"列"也成立.

利用这些性质可以简化行列式的计算．为清楚起见，交换行列式 i,j 两行(列)，记作 $r_i\leftrightarrow r_j(c_i\leftrightarrow c_j)$；行列式第 i 行(列)乘以 k，记作 $r_i\times k(c_i\times k)$；行列式第 i 行(列)提出公因子 k，记作 $r_i\div k(c_i\div k)$；以数 k 乘行列式第 i 行(列)加到第 j 行(列)上，记作 $r_j+kr_i(c_j+kc_i)$.

例 3 计算

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 2 & 3 & -4 & 7 \\ -1 & -2 & 5 & -8 \\ 1 & 3 & -5 & 10 \end{vmatrix}.$$

解

$$D\xlongequal{r_2+(-2)r_1}\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 5 & -8 \\ 1 & 3 & -5 & 10 \end{vmatrix}\xlongequal[r_3+1\cdot r_1]{r_4+(-1)r_1}\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & 6 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_4+1\cdot r_2}\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

$$=1\times(-1)\times2\times5=-10.$$

例 4 已知

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=a,\qquad \begin{vmatrix} a_1' & c_1 & b_1 \\ a_2' & c_2 & b_2 \\ a_3' & c_3 & b_3 \end{vmatrix}=b.$$

计算

$$D=\begin{vmatrix} a_1+2a_1' & a_2+2a_2' & a_3+2a_3' \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1+3b_1 & c_2+3b_2 & c_3+3b_3 \end{vmatrix}.$$

解

$$D\xlongequal{\text{性质 1.5}}\begin{vmatrix} a_1+2a_1' & a_2+2a_2' & a_3+2a_3' \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{性质 1.4}}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 2a_1' & 2a_2' & 2a_3' \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{性质 1.3}}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}+2\begin{vmatrix} a_1' & a_2' & a_3' \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{性质 1.1}}\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}+2\begin{vmatrix} a_1' & b_1 & c_1 \\ a_2' & b_2 & c_2 \\ a_3' & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{性质 1.2}}\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}-2\begin{vmatrix} a_1' & c_1 & b_1 \\ a_2' & c_2 & b_2 \\ a_3' & c_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$=a-2b.$$

一般地，阶数低的行列式比阶数高的行列式容易计算．因此我们希望能把 n 阶行列式的计算转化成 $n-1$ 阶行列式计算．为此引入行列式的余子式和代数余子式的概念．

在给定的 n 阶行列式中，把 a_{ij}所在的第 i 行和第 j 列的元素划去，余下的元素按原来的排法构成的 $n-1$ 阶行列式叫做元素 a_{ij}的**余子式**，记为 M_{ij}，而 a_{ij}的**代数余子式**是指 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$.

例如，行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

中元素 a_{32}的余子式和代数余子式分别为

$$M_{32}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}, \qquad A_{32}=(-1)^{3+2}M_{32}=-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}.$$

下面讨论将 n 阶行列式转化为 $n-1$ 阶行列式计算的问题.

引理 1.1 如果 n 阶行列式 D 中第 i 行所有元素除 a_{ij} 外都是零,那么 D 等于 a_{ij} 与它的代数余子式 A_{ij} 的乘积,即 $D=a_{ij}A_{ij}$.

证 先证 a_{ij} 位于第 n 行第 n 列处的情形,此时

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum(-1)^{t(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n},$$

由于只有 $p_n=n$ 时,a_{np_n} 才可能不为 0,于是

$$\begin{aligned} D &= \sum(-1)^{t(p_1p_2\cdots p_{n-1}n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{n-1p_{n-1}}a_{nn} \\ &=a_{nn}\sum(-1)^{t(p_1p_2\cdots p_{n-1}n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{n-1p_{n-1}} \\ &=a_{nn}M_{nn}=a_{nn}A_{nn}. \end{aligned}$$

再证一般情形,此时

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & a_{ij} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \xlongequal[r_{n-1}\leftrightarrow r_n]{\substack{r_i\leftrightarrow r_{i+1} \\ r_{i+1}\leftrightarrow r_{i+2} \\ \cdots}} (-1)^{(n-i)}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \\ 0 & \cdots & a_{ij} & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[c_{n-1}\leftrightarrow c_n]{\substack{c_j\leftrightarrow c_{j+1} \\ c_{j+1}\leftrightarrow c_{j+2} \\ \cdots}} (-1)^{(n-i)+(n-j)}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} & a_{1j} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} & a_{i-1,j} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} & a_{i+1,j} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{ij} \end{vmatrix}$$

$$=a_{ij}\left[(-1)^{(n-i)+(n-j)}M_{ij}\right]=a_{ij}\left[(-1)^{i+j}M_{ij}\right]=a_{ij}A_{ij}. \qquad \square$$

性质 1.6 行列式等于它的任一行(列)的各元素与其代数余子式的乘积之和,即

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in},\quad i=1,2,\cdots,n;$$
$$D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj},\quad j=1,2,\cdots,n.$$

证

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1}+0+\cdots+0 & 0+a_{i2}+0+\cdots+0 & \cdots & 0+0+\cdots+0+a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{性质 1.4}}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a_{i2} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\cdots+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{引理 1.1}}a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in},\qquad j=1,2,\cdots,n.$$

同理可证

$$D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj},\qquad j=1,2,\cdots,n.$$ ▯

称性质 1.6 为**行列式按行(列)展开法则**.

例 5 计算

$$D_n=\begin{vmatrix} x & y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & y \\ y & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}.$$

解 将 D_n 按第 1 列展开得

$$D_n=x\begin{vmatrix} x & y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & y \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}_{n-1}+(-1)^{n+1}y\begin{vmatrix} y & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x & y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & y \end{vmatrix}_{n-1}$$

$$=x^n+(-1)^{n+1}y^n.$$

例 6 计算

$$
D_{2n}=\begin{vmatrix}
a & & & & & & & b \\
& a & & & 0 & & b & \\
& & \ddots & & & \cdots & & \\
0 & & & a & b & & & 0 \\
 & & & c & d & & & \\
& & \cdots & & & \ddots & & \\
& c & & & 0 & & d & \\
c & & & & & & & d
\end{vmatrix}.
$$

解 按第1行展开，有

$$
D_{2n}=a\begin{vmatrix}
a & & 0 & & b & 0 \\
& \ddots & & \cdots & & \vdots \\
0 & & a\quad b & & 0 & \vdots \\
& & c\quad d & & & \\
& \cdots & & \ddots & & \\
c & & 0 & & d & 0 \\
0 & \cdots & & \cdots & 0 & d
\end{vmatrix}
+(-1)^{1+2n}b\begin{vmatrix}
0 & a & & 0 & & b \\
\vdots & & \ddots & & \cdots & \\
\vdots & 0 & & a\quad b & & 0 \\
& & & c\quad d & & \\
& & \cdots & & \ddots & \\
0 & c & & 0 & & d \\
c & 0 & \cdots & & \cdots & 0
\end{vmatrix}
$$

（其中最后一行中的 $0\ \cdots\ 0$ 共 $2(n-1)$ 个）

$$
\begin{aligned}
&=adD_{2(n-1)}+(-1)^{(1+2n)+(1+2n-1)}bcD_{2(n-1)}\\
&=(ad-bc)D_{2(n-1)}.
\end{aligned}
$$

由此递推可得

$$
\begin{aligned}
D_{2n}&=(ad-bc)D_{2(n-1)}=(ad-bc)^2D_{2(n-2)}\\
&=\cdots\\
&=(ad-bc)^{n-1}D_2=(ad-bc)^{n-1}\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}\\
&=(ad-bc)^n.
\end{aligned}
$$

例7 证明范德蒙(Vandermonde)行列式

$$
D_n=\begin{vmatrix}
1 & 1 & \cdots & 1 \\
x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\
x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1}
\end{vmatrix}=\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j)\qquad (n\geqslant 2).
$$

其中记号“$\prod$”表示全体同类因子的乘积．

证 用数学归纳法．由于

$$D_2=\begin{vmatrix}1 & 1\\ x_1 & x_2\end{vmatrix}=x_2-x_1=\prod_{1\leqslant j<i\leqslant 2}(x_i-x_j),$$

所以，当 $n=2$ 时，结论正确．现假设命题对 $n-1$ 成立，往证命题对 n 成立．

$$D_n \xlongequal[r_2-x_1r_1]{\substack{r_n-x_1r_{n-1}\\ r_{n-1}-x_1r_{n-2}\\ \cdots\ \cdots}} \begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 0 & x_2-x_1 & x_3-x_1 & \cdots & x_n-x_1\\ 0 & x_2(x_2-x_1) & x_3(x_3-x_1) & \cdots & x_n(x_n-x_1)\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & x_2^{n-2}(x_2-x_1) & x_3^{n-2}(x_3-x_1) & \cdots & x_n^{n-2}(x_n-x_1)\end{vmatrix}$$

按第 1 列展开，再把每列的公因子提出，得

$$D_n=(x_2-x_1)(x_3-x_1)\cdots(x_n-x_1)\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ x_2 & x_3 & \cdots & x_n\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2}\end{vmatrix}.$$

由归纳假设得

$$D_n=(x_2-x_1)(x_3-x_1)\cdots(x_n-x_1)\prod_{2\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j)=\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j).$$ □

由性质 1.6 可得下面的性质 1.7.

性质 1.7 行列式任一行（列）的元素与另一行（列）对应元素的代数余子式乘积之和等于 0，即

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0,\quad i\neq j,i、j=1,2,\cdots,n;$$

$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=0,\quad i\neq j,i、j=1,2,\cdots,n.$$

证 不妨设 $i<j$，对行列式 $D=\triangle(a_{ij})$，考虑辅助行列式

$$D_1=\begin{vmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix},$$

第 i 列　第 j 列

其中第 i 列与第 j 列对应元素相同，故 $D_1=0$. 显然 D_1 与 D 的第 j 列诸元素的代数余子式都是 $A_{1j},A_{2j},\cdots,A_{nj}$. 把 D_1 按第 j 列展开得

$$D_1=a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}.$$

所以

$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=0,\quad i\neq j, i、j=1,2,\cdots,n.$$

类似可得

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0,\quad i\neq j,\quad i、j=1,2,\cdots,n.\qquad \square$$

综合性质 1.6 和性质 1.7，有公式

$$\sum_{k=1}^{n}a_{ki}A_{kj}=a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=\begin{cases}D & 当\ i=j\\ 0 & 当\ i\neq j;\end{cases}$$

$$\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{jk}=a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=\begin{cases}D & 当\ i=j\\ 0 & 当\ i\neq j.\end{cases}$$

1.3 克莱姆(Cramer)法则

行列式的应用是多方面的．现在，应用行列式解决线性方程组的求解问题．在这里只考虑方程个数与未知数的个数相等的情形，至于更一般的情形留到后面讨论．

设有含 n 个未知数，n 个方程的线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n.\end{cases}\tag{7}$$

把方程组(7)的系数行列式记为 D，即

$$D=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}.$$

定理 1.2(克莱姆法则)　如果线性方程组(7)的系数行列式 $D\neq 0$，则方程组(7)有解，并且解是唯一的，此时

$$x_1=\frac{D_1}{D},\qquad x_2=\frac{D_2}{D},\quad \cdots,\quad x_n=\frac{D_n}{D},\tag{8}$$

其中 $D_j(j=1,2,\cdots,n)$ 是把系数行列式 D 中第 j 列的元素依次用方程组右端的常数代替后得到的 n 阶行列式，即

$$D_j=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad j=1,2,\cdots,n. \tag{9}$$

克莱姆法则包含三个结论：①方程组有解；②解是唯一的；③解由公式(8)给出．为证明这三个结论，只须指出：

1. $x_1=\frac{D_1}{D}$， $x_2=\frac{D_2}{D}$， $\cdots$， $x_n=\frac{D_n}{D}$是方程组(7)的解；

2. 假如方程组有解，它的解一定是式(8).

证　首先指出 $x_1=\frac{D_1}{D}$， $x_2=\frac{D_2}{D}$， $\cdots$， $x_n=\frac{D_n}{D}$是方程组(7)的解．即

$$a_{i1}\frac{D_1}{D}+a_{i2}\frac{D_2}{D}+\cdots+a_{in}\frac{D_n}{D}=b_i \quad (i=1,2,\cdots,n).$$

考查第1行与第 $i+1$ 行完全相同的 $n+1$ 阶行列式

$$\begin{vmatrix} b_i & a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ b_1 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_n & a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \qquad i=1,2,\cdots,n \tag{10}$$

它的值为0. 因为其第1行第 $j+1$ 列元素 a_{ij}的代数余子式为

$$(-1)^{1+j+1}\begin{vmatrix} b_1 & a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_n & a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\substack{\cdots\ \cdots\ \cdots \\ c_{j-1}\leftrightarrow c_j}]{\substack{c_1\leftrightarrow c_2 \\ c_2\leftrightarrow c_3}}(-1)^{2+j}\cdot(-1)^{j-1}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=-D_j.$$

所以将式(10)按第1行展开得

$$0=b_iD-a_{i1}D_1-a_{i2}D_2-\cdots-a_{in}D_n.$$

即

$$a_{i1}\frac{D_1}{D}+a_{i2}\frac{D_2}{D}+\cdots+a_{in}\frac{D_n}{D}=b_i \quad (i=1,2,\cdots,n).$$

其次指出，假如方程组有解，它的解一定是式(8)，设 $x_1=c_1,x_2=c_2,\cdots,x_n=c_n$ 是方程组(7)的解，则

$$a_{i1}c_1+a_{i2}c_2+\cdots+a_{in}c_n=b_i \quad i=1,2,\cdots,n.$$

用 A_{i1} 乘上式两边得

$$A_{i1}a_{i1}c_1+A_{i1}a_{i2}c_2+\cdots+A_{i1}a_{in}c_n=A_{i1}b_i \quad i=1,2,\cdots,n.$$

将这 n 个等式相加得

$$\begin{aligned}&(a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+\cdots+a_{n1}A_{n1})c_1+(a_{12}A_{11}+a_{22}A_{21}+\cdots\\&+a_{n2}A_{n1})c_2+\cdots+(a_{1n}A_{11}+a_{2n}A_{21}+\cdots+a_{nn}A_{n1})c_n\\&=b_1A_{11}+b_2A_{21}+\cdots+b_nA_{n1}.\end{aligned}$$

由性质 1.6 及性质 1.7 知 c_1 系数是 D，$c_2,c_3,\cdots,c_n$ 的系数都是 0. 再由(5)式知 $b_1A_{11}+b_2A_{21}+\cdots+b_nA_{n1}=D_1$，故 $Dc_1=D_1$，$c_1=D_1/D$. 同理 $c_2=D_2/D,c_3=D_3/D,\cdots,c_n=D_n/D$. 这就是说，如果 $x_1=c_1,x_2=c_2,\cdots,x_n=c_n$ 是方程组(7)的解，则必有 $c_1=D_1/D,c_2=D_2/D,\cdots,c_n=D_n/D$. □

例 8 用克莱姆法则解线性方程组

$$\begin{cases}x_1-3x_2+7x_3=2\\2x_1+4x_2-3x_3=-1\\-3x_1+7x_2+2x_3=3.\end{cases}$$

解

$$D=\begin{vmatrix}1&-3&7\\2&4&-3\\-3&7&2\end{vmatrix}=196\neq0,\qquad D_1=\begin{vmatrix}2&-3&7\\-1&4&-3\\3&7&2\end{vmatrix}=-54,$$

$$D_2=\begin{vmatrix}1&2&7\\2&-1&-3\\-3&3&2\end{vmatrix}=38,\qquad D_3=\begin{vmatrix}1&-3&2\\2&4&-1\\-3&7&3\end{vmatrix}=80.$$

由克莱姆法则，方程组有唯一解：

$$x_1=\frac{-54}{196}=-\frac{27}{98},\qquad x_2=\frac{38}{196}=\frac{19}{98},\qquad x_3=\frac{80}{196}=\frac{20}{49}.$$

应该注意，若线性方程组(3)无解或有多个解，则它的系数行列式必为 0. 至于方程组的行列式为零时，方程组的解的情形我们将在线性方程组一章中一并讨论.

习 题 一

1. 按自然数从小到大的自然次序，求解下列各题：

(1)求 1 至 6 的全排列 241356 的逆序数；

(2)求 1 至 $2n$ 的全排列 $13\cdots(2n-1)24\cdots(2n)$ 的逆序数；

(3)选择 i 与 j，使由 1 至 9 的排列 $91274i56j$ 成偶排列；

(4)选择 i 与 j，使由 1 至 9 的排列 $71i25j489$ 成奇排列.

2. 计算下列行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 9a & 18b \\ 26b & 13a \end{vmatrix}$；　　(2) $\begin{vmatrix} 32153 & 32053 \\ 75284 & 75184 \end{vmatrix}$；

(3) $\begin{vmatrix} 10 & 8 & 2 \\ 15 & 12 & 3 \\ 20 & 32 & 12 \end{vmatrix}$；　　(4) $\begin{vmatrix} -ab & ac & ae \\ bd & -cd & de \\ bf & cf & -ef \end{vmatrix}$.

3. 已知：$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=1$，利用行列式性质求下列行列式：

(1) $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 3x+3 & 3y & 3z+2 \\ x+2 & y+2 & z+2 \end{vmatrix}$；　(2) $\begin{vmatrix} x+1 & y+1 & z+1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix}$.

4. 用行列式定义计算：

(1) $\begin{vmatrix} & & & & 1 \\ & & & 2 & \\ & & 3 & & \\ & 4 & & & \\ 5 & & & & \end{vmatrix}$；　(2) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$.

5. 用行列式的定义证明：

(1) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ 0 & 0 & 0 & a_{34} & a_{35} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & a_{45} \\ 0 & 0 & 0 & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}=0$；

(2) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$.

6. 计算：

(1) $\begin{vmatrix} a & 3 & 0 & 5 \\ 0 & b & 0 & 2 \\ 1 & 2 & c & 3 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix}$；　　(2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 11 \\ -2 & -1 & 4 & 4 \\ -2 & -1 & 1 & 10 \end{vmatrix}$；

(3) $D_n=\begin{vmatrix} x & a & \cdots & a \\ a & x & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$；　　(4) $D_n=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$；

(5) $D_n=\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a \end{vmatrix}$；(6) $D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & \cdots & 1 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & -1 \end{vmatrix}$.

7. 证明：

(1) $\begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=(a-b)^3$； (2) $\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix}=0$；

(3) $\begin{vmatrix} 1 & x_1+a_1 & x_1^2+b_1x_1+b_2 & x_1^3+c_1x_1^2+c_2x_1+c_3 \\ 1 & x_2+a_1 & x_2^2+b_1x_2+b_2 & x_2^3+c_1x_2^2+c_2x_2+c_3 \\ 1 & x_3+a_1 & x_3^2+b_1x_3+b_2 & x_3^3+c_1x_3^2+c_2x_3+c_3 \\ 1 & x_4+a_1 & x_4^2+b_1x_4+b_2 & x_4^3+c_1x_4^2+c_2x_4+c_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 \\ 1 & x_4 & x_4^2 & x_4^3 \end{vmatrix}$.

8. 解关于未知数 x 的方程：

(1) $\begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ 3 & x-2 & 6 \\ 0 & 0 & x-1 \end{vmatrix}=0$； (2) $\begin{vmatrix} a & a & x \\ m & m & m \\ b & x & b \end{vmatrix}=0$, $(m\neq 0)$.

9. 用克莱姆法则解方程组：

(1) $\begin{cases} 5x_1+4x_2=11 \\ 6x_1+5x_2=20; \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 5x_1+6x_2 & =1 \\ x_1+5x_2+6x_3 & =0 \\ x_2+5x_3 & =0. \end{cases}$

10. 已知 222，407，185 三个数都可以被 37 整除．不求行列式的值，证明

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 4 & 0 & 7 \\ 1 & 8 & 5 \end{vmatrix}$$

也可以被 37 整除．

11. 计算行列式：

$$D=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & x+1 \\ 1 & -1 & 1 & x-1 & 1 \\ 1 & -1 & x+1 & -1 & 1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 & 1 \\ x+1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

12. 证明：若 $x_1+x_2+x_3+x_4=1$，则

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 \\ x_1^4 & x_2^4 & x_3^4 & x_4^4 \end{vmatrix} = (x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)(x_2-x_3)(x_2-x_4)(x_3-x_4).$$

13. 证明：

(1)
$$\begin{vmatrix} a_1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_2 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ a_3 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix} = a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n;$$

(2)
$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \end{vmatrix} = n+1;$$

(3)
$$\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n} a_i\left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right), a_i\neq 0, i=1,2,\cdots,n.$$

14. 设 $f(x)$是一个次数不大于 $n-1$ 的一元多项式. 如果存在 n 个互不相同的数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 使

$$f(a_i)=0, i=1,2,\cdots,n.$$

试证 $f(x)=0$.

第二章 矩　　阵

矩阵的概念是从大量的各种各样的问题中抽象出来的．这些问题的研究常常反映为矩阵的某些方面的研究，有些表面上完全没有联系，性质完全不同的问题，归结成矩阵问题以后却是相同的．这就使矩阵成为一个应用十分广泛的数学工具，因而也就使矩阵成为线性代数的一个极其重要的研究对象．本章主要讨论以下几个问题：

1. 矩阵的概念；
2. 矩阵的运算；
3. 可逆矩阵及逆矩阵的求法；
4. 矩阵的秩及其求法；
5. 初等变换与初等矩阵；
6. 矩阵的分块表示法；
7. 分块阵的初等变换．

2.1　矩阵的概念

矩阵理论是线性代数的基础，它在控制论、信息论、编码学、计算机科学等领域都是不可缺少的.

我们先来介绍数域的概念．如果数集 F 包含 0 和 1，并且 F 中任何两个数的和、差、积、商(除数不为零)仍在 F 中，那么，就称 F 是一个**数域**.

全体有理数之集 Q、全体实数之集 R、全体复数之集 C 都是数域. 分别称为**有理数域**、**实数域**和**复数域**. 这是三个最常用的数域.

定义 2.1　由数域 F 内 $m\times n$ 个数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 排成的 m 行 n 列的数表

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{1}$$

叫做 F 上的 m 行 n 列**矩阵**，简称 $m\times n$ 矩阵或**矩阵**．这 $m\times n$ 个数叫做矩阵 A 的元素，a_{ij} 叫做矩阵 A 的第 i 行第 j 列元素．元素都是实数的矩阵称为**实矩阵**；元素都是复数的矩阵称为**复矩阵**．用大写字母 A、B、C…表示矩阵. 矩阵(1)可以简写成

$$A=(a_{ij})_{m\times n}\text{或 }A=(a_{ij}).$$

如果 $A=(a_{ij})$ 与 $B=(b_{ij})$ 都是 $m\times n$ 矩阵，并且它们的对应元素相等，即

$$a_{ij}=b_{ij},\quad i=1,2,\cdots,m;\quad j=1,2,\cdots,n.$$

那么,就称矩阵 A 与 B 相等,记作 $A=B$.

所有元素都是零的矩阵叫**零矩阵**,记为 $0_{m\times n}$或 0.

只有一行的矩阵 $A=(a_1\ a_2\cdots a_n)$,叫做**行矩阵**.

只有一列的矩阵 $A=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\\cdots\\a_n\end{bmatrix}$,叫做**列矩阵**.

如果 $m=n$,则称 A 为 n 阶**方阵**.

n 阶方阵 A 的从左上角到右下角那条线(主对角线)上的元素 $a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn}$叫做 A 的**主对角线元素**.

称主对角线下方元素全是零的方阵为**上三角(矩)阵**.如

$$\begin{bmatrix}2&7&1&0\\0&4&1&1\\0&0&2&1\\0&0&0&6\end{bmatrix},\qquad \begin{bmatrix}3&2&4\\0&0&1\\0&0&2\end{bmatrix}$$

都是上三角阵.

称主对角线上方元素都是零的方阵为**下三角(矩)阵**.如

$$\begin{bmatrix}3&0&0\\2&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}.$$

非主对角线元素全部为零的方阵叫做**对角(形)矩阵**.如

$$\begin{bmatrix}3&0\\0&1\end{bmatrix},\qquad \begin{bmatrix}a&0&0\\0&b&0\\0&0&c\end{bmatrix},\qquad \begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

都是对角矩阵.

称 n 阶方阵

$$E_n=\begin{bmatrix}1&0&\cdots&0\\0&1&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&\cdots&1\end{bmatrix}$$

为 n 阶**单位(矩)阵**.这种方阵的特点是其主对角线元素全是 1,其余元素全是零.如

$$E_2=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix},\qquad E_3=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}.$$

我们把单位阵简记为 E.

2.2 矩阵的运算

2.2.1 矩阵的加法

定义 2.2 设 $A=(a_{ij})$，$B=(b_{ij})$ 都是 $m\times n$ 矩阵，规定 A 与 B 的和为矩阵 $(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}$，记为 $A+B$，即

$$A+B=\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}.$$

例如

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 7 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 7 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 14 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，称矩阵 $(-a_{ij})_{m\times n}$ 为 A 的**负矩阵**，记为 $-A$，即

$$-A=\begin{bmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{m1} & -a_{m2} & \cdots & -a_{mn} \end{bmatrix}.$$

有了负矩阵的概念，可定义两个 $m\times n$ 矩阵 A,B 的差为 $A-B=A+(-B)$.

例如

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 7 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 7 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

矩阵的加法满足(A,B 都是 $m\times n$ 矩阵)：

(1) $A+B=B+A$；

(2) $(A+B)+C=A+(B+C)$；

(3) $A+0_{m\times n}=A$；

(4) $A+(-A)=0_{m\times n}$.

注意 只有当两个矩阵的行数相同且列数也相同时，这两个矩阵才能相加(减).

2.2.2 数与矩阵相乘

定义 2.3 设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，k 是一个数，规定 k 与 A 的乘积为矩阵 $(ka_{ij})_{m\times n}$，记为 kA，即

$$kA=\begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{bmatrix}.$$

数与矩阵相乘，简称为数乘．

例如

$$5E_4=5\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

可以看到，数与矩阵相乘，就是用这个数去乘矩阵的每个元素．

数与矩阵相乘满足（A,B 都是 $m\times n$ 矩阵；k,l 为数）：

(1) $(kl)A=k(lA)$；

(2) $(k+l)A=kA+lA$；

(3) $k(A+B)=kA+kB$；

(4) $1\cdot A=A$.

矩阵的加法与数乘统称为矩阵的**线性运算**．

2.2.3 矩阵与矩阵相乘

设

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ip} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mp} \end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{p1} & b_{p2} & \cdots & b_{pj} & \cdots & b_{pn} \end{bmatrix}.$$

记 A 的第 i 行的诸元素与 B 的第 j 列的对应诸元素乘积之和为 c_{ij}，即

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{ip}b_{pj}=\sum_{k=1}^{p}a_{ik}b_{kj}\quad i=1,2,\cdots,m;\quad j=1,2,\cdots,n.$$

定义 2.4 设 $A=(a_{ij})_{m\times p}$，$B=(b_{ij})_{p\times n}$，A 的列数与 B 的行数相同，规定 A 与 B 的乘积是一个 $m\times n$ 的矩阵 $C=(c_{ij})_{m\times n}$，记作 $C=AB$，其中

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{ip}b_{pj}\qquad i=1,2,\cdots,m;\quad j=1,2,\cdots,n.$$

例如　设 $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$，　$B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$，则

$$AB=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}\\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}\end{bmatrix}.$$

注意： ①只有当左侧矩阵 A 的列数与右侧矩阵 B 的行数相同时，两矩阵才能相乘；

②AB 的行数等于 A 的行数，AB 的列数等于 B 的列数；

③AB 的第 i 行第 j 列处的元素等于 A 的第 i 行与 B 的第 j 列的对应元素乘积的和.

例 1 设

$$A=\begin{bmatrix}1 & 6\\ 2 & 7\\ 3 & 8\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}4 & 3\\ 1 & 4\end{bmatrix},\ \text{求}\ AB.$$

解 因为 A 是 3×2 矩阵，B 是 2×2 矩阵，A 的列数等于 B 的行数，所以 A 与 B 可以相乘，其乘积 AB 是 3×2 矩阵．按定义 2.4 有

$$AB=\begin{bmatrix}1 & 6\\ 2 & 7\\ 3 & 8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & 3\\ 1 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\times4+6\times1 & 1\times3+6\times4\\ 2\times4+7\times1 & 2\times3+7\times4\\ 3\times4+8\times1 & 3\times3+8\times4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10 & 27\\ 15 & 34\\ 20 & 41\end{bmatrix}.$$

例 2 设 $A=(3\quad 5\quad 7)$，$B=\begin{bmatrix}1\\ 2\\ -1\end{bmatrix}$ 求 AB 及 BA.

解 $$AB=(3\quad 5\quad 7)\begin{bmatrix}1\\ 2\\ -1\end{bmatrix}=(3\times1+5\times2+7\times(-1))=(6)=6\text{[1]}.$$

$$BA=\begin{bmatrix}1\\ 2\\ -1\end{bmatrix}(3\quad 5\quad 7)=\begin{bmatrix}1\times3 & 1\times5 & 1\times7\\ 2\times3 & 2\times5 & 2\times7\\ (-1)\times3 & (-1)\times5 & (-1)\times7\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}3 & 5 & 7\\ 6 & 10 & 14\\ -3 & -5 & -7\end{bmatrix}.$$

矩阵乘法满足(假设运算都是有意义的)：

(1) $(AB)C=A(BC)$；

(2) $A(B+C)=AB+AC$，$(A+B)C=AC+BC$；

(3) $k(AB)=(kA)B=A(kB)$ （k 是数）；

(4) $E_mA=AE_n=A$ （A 是 $m\times n$ 矩阵）；

(5) $0_{p\times m}A=0_{p\times n}$，$A0_{n\times q}=0_{m\times q}$ （A 是 $m\times n$ 矩阵）.

与通常数的乘法相比较，矩阵乘法有许多特殊性，主要有：

(1) 矩阵乘法不满足交换律，这有两层含义．其一是说，有时虽然 AB 有意义，但 BA 未必有意义．例 1 中的 A、B 就是这样．其二是说，即使 AB，BA 都有意义，AB 与

---

[1] 为方便，有时将 1×1 矩阵 $(a)_{1\times1}$ 简记为 a.

BA 也未必相等．例 2 中的 A、B 就是这样．总之，一般说 $AB \neq BA$（如果对某特定的矩阵 A、B 有 $AB=BA$，则称 A 与 B **乘积可换**）.

（2） 矩阵乘法不满足消去律，即在一般情况下，由 $AB=AC$ 不能得出 $B=C$. 同样由 $BA=CA$ 不能得出 $B=C$.

例如 设

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -6 \end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix} -4 & 8 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}.$$

则

$$AB=\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$AC=\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -4 & 8 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

即 $AB=AC$，但 $B \neq C$.

由这个例子还可以看出：

（3） 矩阵乘法有零因子，即存在矩阵 $A \neq 0, B \neq 0$，使得 $AB=0$. 因此，在一般情况下，不能由 $AB=0$ 断定 $A=0$ 或 $B=0$.

矩阵乘法有广泛的应用，许多复杂的问题都可用矩阵乘法表达得非常简洁．

考查线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m. \end{cases} \tag{2}$$

令

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{bmatrix},\quad X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix},$$

则式(2)可表示成 $AX=B$.

2.2.4 方阵的幂

利用矩阵乘法，可递归定义方阵的幂．设 A 是 n 阶方阵，规定

$$A^0=E_n,\quad A^1=A,\quad A^2=AA,\cdots,A^{k+1}=A^kA,\cdots,$$

其中 k 是正整数，即 A^k 就是 k 个 A 连乘．

显然，A^kA 有意义的充要条件是 A 为方阵，故只有方阵才有幂．

方阵的幂满足（A 为方阵；k,l 为非负整数）：

（1） $A^kA^l=A^{k+l}$；

（2） $(A^k)^l=A^{kl}$.

作为矩阵乘法不满足交换律的自然结果，一般说来

$$(AB)^k \neq A^k B^k.$$

例 3 求证

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} \cos(n\theta) & -\sin(n\theta) \\ \sin(n\theta) & \cos(n\theta) \end{bmatrix}, n=1,2,\cdots.$$

证 用数学归纳法，当 $n=1$ 时，等式显然成立．设 $n=k$ 时等式成立，即

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} \cos(k\theta) & -\sin(k\theta) \\ \sin(k\theta) & \cos(k\theta) \end{bmatrix}.$$

当 $n=k+1$ 时，有

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}^{k+1} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(k\theta) & -\sin(k\theta) \\ \sin(k\theta) & \cos(k\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(k\theta)\cos\theta - \sin(k\theta)\sin\theta & -\cos(k\theta)\sin\theta - \sin(k\theta)\cos\theta \\ \sin(k\theta)\cos\theta + \cos(k\theta)\sin\theta & -\sin(k\theta)\sin\theta + \cos(k\theta)\cos\theta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(k+1)\theta & -\sin(k+1)\theta \\ \sin(k+1)\theta & \cos(k+1)\theta \end{bmatrix}.$$

于是对任意自然数 n 等式成立． □

2.2.5 方阵的行列式及行列式的乘法公式

定义 2.5 由 n 阶方阵 A 的元素所构成的行列式（各元素的位置不变）叫做方阵 A 的行列式，记作 $|A|$，或 $\det A$.

例如 设

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

则

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

注意： 由于行列式是 n 行 n 列的，如果矩阵 A 不是方阵，就不能对 A 取行列式．矩阵与行列式的概念是完全不同的，必须弄清其含义及记号的区别．

定理 2.1 设 A,B 是两个 n 阶方阵（阶数相同），k 是一个数，则

(1) $|kA| = k^n|A|$；

(2) $|AB| = |A||B|$.

这里只给出(1)的证明,(2)的证明在 2.7 中给出.

证 (1) 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$,则

$$kA=\begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{n1} & ka_{n2} & \cdots & ka_{nn} \end{bmatrix}.$$

于是由第一章性质 1.3 得

$$|kA|=k^n|A|. \qquad \square$$

称公式 $|AB|=|A||B|$ 为**行列式乘法公式**.

例 4 设

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix},$$

求 $|2(AB)^5|$.

解

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}=-2,$$

$$|B|=\begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 0 \\ 2 & -5 & 0 \end{vmatrix}=5,$$

$$|2(AB)^5|=2^3|(AB)^5|=8(|AB|)^5=8(|A||B|)^5=8[(-2)\times 5]^5=-8\times 10^5.$$

例 5 设 $A=k_1E_n$, $B=k_2E_n$,其中 k_1,k_2 是数,求 $|A|+|B|$ 及 $|A+B|$.

解 $|A|+|B|=|k_1E_n|+|k_2E_n|=k_1^n|E_n|+k_2^n|E_n|=k_1^n+k_2^n$,

$$|A+B|=|k_1E_n+k_2E_n|=|(k_1+k_2)E_n|=(k_1+k_2)^n|E_n|=(k_1+k_2)^n.$$

由例 5 可以看出,一般说 $|A+B|\neq|A|+|B|$.

虽然对 n 阶方阵 A,B,一般说来 $AB\neq BA$,但是,由行列式乘法公式知 $|AB|=|BA|$.

2.2.6 矩阵的转置

定义 2.6 把一个 $m\times n$ 的矩阵 A 的第 i 行第 j 列元素 a_{ij} 作为新矩阵的第 j 行第 i 列元素,$i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n$,形成一个 $n\times m$ 的新矩阵 A',称 A' 为原矩阵 A 的**转置矩阵**,A' 亦可记作 A^T.

例如,设

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix},$$

则

$$A'=\begin{bmatrix}3&1\\4&0\\2&4\end{bmatrix}.$$

矩阵的转置矩阵满足(假设运算都可行)：

(1) $(A')'=A$；

(2) $(A+B)'=A'+B'$；

(3) $(kA)'=kA'$，k 是数；

(4) $(AB)'=B'A'$；

(5) $|A'|=|A|$.

(1)～(3)是明显的，(5)就是第一章的性质 1.1，下面证明(4).

设 $A=(a_{ij})_{m\times p}$，$B=(b_{ij})_{p\times n}$，显而易见，$(AB)'$ 和 $B'A'$ 都是 $n\times m$ 矩阵．其次，$(AB)'$ 的第 i 行第 j 列的元素就是 AB 的第 j 行第 i 列的元素，故等于

$$a_{j1}b_{1i}+a_{j2}b_{2i}+\cdots+a_{jp}b_{pi}.$$

而 $B'A'$ 的第 i 行第 j 列的元素等于 B' 的第 i 行的元素与 A' 的第 j 列的对应元素的乘积之和，故等于 B 的第 i 列的元素与 A 的第 j 行的对应元素的乘积之和

$$b_{1i}a_{j1}+b_{2i}a_{j2}+\cdots+b_{pi}a_{jp}.$$

上两式显然相等，所以 $(AB)'=B'A'$． ▯

注意： ①反复应用(4)得 $(ABC)'=C'B'A'$．②一般 $(AB)'\neq A'B'$．

设 $A=(a_{ij})$ 为 n 阶方阵．若 $A'=A(A'=-A)$，则称 A 为**对称阵(反对称阵)**．对称阵的特点是 $a_{ij}=a_{ji}$，$i,j=1,2,\cdots,n$. 即 A 的元素以主对角线为对称轴对应相等．

例如

$$A=\begin{bmatrix}1&1&2\\1&0&4\\2&4&1\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&2&0\\0&0&3\end{bmatrix},\quad A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{bmatrix},$$

都是对称阵．

设 A,B 都是 n 阶对称阵．由 $(A+B)'=A'+B'=A+B$，知 A 与 B 的和 $A+B$ 还是对称阵，但 AB 未必是对称阵．若 A,B 还是乘积可换的 $(AB=BA)$，则由 $(AB)'=B'A'=BA=AB$，知 A 与 B 的积 AB 也是对称阵．

定义 2.7 设 $A=(a_{ij})$ 是复矩阵，用 $\overline{a}_{ij}$ 表示 a_{ij} 的共轭复数，称 $(\overline{a}_{ij})$ 为 A 的**共轭矩阵**，记为 $\overline{A}$. 用 A^H 表示 $(\overline{A})'$，称其为 A 的**共轭转置矩阵**．

例如，设

$$A=\begin{bmatrix}\mathrm{i}&1&3\\2&\mathrm{i}&1-\mathrm{i}\end{bmatrix},$$

则

$$\overline{A}=\begin{bmatrix}-\mathrm{i} & 1 & 3\\ 2 & -\mathrm{i} & 1+\mathrm{i}\end{bmatrix},\qquad A^H=(\overline{A})'=\begin{bmatrix}-\mathrm{i} & 2\\ 1 & -\mathrm{i}\\ 3 & 1+\mathrm{i}\end{bmatrix}.$$

共轭矩阵满足(设 A,B 是复矩阵,k 是复数,且运算都是可行的):

(1) $\overline{A+B}=\overline{A}+\overline{B}$;

(2) $\overline{kA}=\overline{k}\,\overline{A}$;

(3) $\overline{AB}=\overline{A}\,\overline{B}$;

(4) $|\overline{A}|=\overline{|A|}$.

2.3 逆 矩 阵

2.3.1 逆矩阵的定义

定义 2.8 设 A 为 n 阶方阵,若存在 n 阶方阵 B,使

$$AB=BA=E$$

则称 A 是**可逆(矩)阵**,称 B 是 A 的**逆(矩)阵**.

例如,由于 $E_nE_n=E_n$,所以 E_n 是可逆矩阵,且 E_n 的逆阵是 E_n. 同样,当 k_1,k_2,k_3 都不为零时,由

$$\begin{bmatrix}k_1 & & \\ & k_2 & \\ & & k_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{k_1} & & \\ & \frac{1}{k_2} & \\ & & \frac{1}{k_3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{k_1} & & \\ & \frac{1}{k_2} & \\ & & \frac{1}{k_3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}k_1 & & \\ & k_2 & \\ & & k_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

知对角阵$\begin{bmatrix}k_1 & & \\ & k_2 & \\ & & k_3\end{bmatrix}$是可逆矩阵,且$\begin{bmatrix}\frac{1}{k_1} & & \\ & \frac{1}{k_2} & \\ & & \frac{1}{k_3}\end{bmatrix}$是其逆阵.

一般地,若 $k_1,k_2,\cdots,k_n$ 都不为零,则对角阵

$$\begin{bmatrix}\frac{1}{k_1} & & & \\ & \frac{1}{k_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{1}{k_n}\end{bmatrix}\text{是对角阵}\begin{bmatrix}k_1 & & & \\ & k_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & k_3\end{bmatrix}\text{的逆阵}.$$

可以断言,如果方阵 A 可逆,则 A 的逆阵是唯一的. 事实上,若 B,C 都是 A 的逆矩

阵,则

$$B=BE=B(AC)=(BA)C=EC=C.$$

今后,将 A 的逆阵记作 A^{-1}.

可逆矩阵是一类重要的方阵．在使用记号 A^{-1}之前,必须首先弄清 A 是否可逆．在无法断定 A 是可逆矩阵的情况下,记号 A^{-1}没有意义．

可逆矩阵有许多好性质,通过直接验证,可以得知:

(1) 若 A 可逆,则 A^{-1}亦可逆,且$(A^{-1})^{-1}=A$;

(2) 若 A 可逆,数 $k\neq0$,则 kA 可逆,且$(kA)^{-1}=\frac{1}{k}A^{-1}$;

(3) 若 A,B 是同阶可逆方阵,则 AB 也可逆,且$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$;

(4) 若 A 可逆,则 A' 可逆,且$(A')^{-1}=(A^{-1})'$.

反复应用(3)可知,若 A_1,A_2,A_3 是同阶可逆阵,则 $A_1A_2A_3$ 可逆,且$(A_1A_2A_3)^{-1}=A_3^{-1}A_2^{-1}A_1^{-1}$.

2.3.2 方阵 A 可逆的充分必要条件、用伴随矩阵法求逆矩阵

设 n 阶方阵

$$A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix}.$$

我们把$|A|$中诸元素 a_{ij}的代数余子式 A_{ij}所组成的 n 阶方阵

$$A^*=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1}\\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn}\end{bmatrix}$$

叫做方阵 A 的**伴随矩阵**,记为 A^* 或 $\mathrm{adj}A$.

注意: A^*中第 i 行第 j 列处的元素是 A_{ji},而不是 A_{ij}.

引理 2.1 设 A 是数域 F 上的 n 阶方阵,则

$$A^*A=AA^*=|A|E_n.$$

证 由第一章性质 1.6 和性质 1.7 得

$$A^*A=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1}\\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{n} a_{k1}A_{k1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sum_{k=1}^{n} a_{k2}A_{k2} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sum_{k=1}^{n} a_{kn}A_{kn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |A| & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |A| & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & |A| \end{bmatrix} = |A|E.$$

同理 $AA^*=|A|E$. 故有

$$AA^*=A^*A=|A|E. \tag{3}$$

定理 2.2 设 A 是数域 F 上的 n 阶方阵，则 A 可逆的充要条件是 $|A|\neq 0$. 当 $|A|\neq 0$ 时，$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$.

证明 设 A 是可逆阵，则 $AA^{-1}=E$. 由行列式乘法公式得 $|A||A^{-1}|=|E|=1$. 从而 $|A|\neq 0$.

设 $|A|\neq 0$，则由 $AA^*=A^*A=|A|E$ 得

$$A(\frac{1}{|A|}A^*)=(\frac{1}{|A|}A^*)A=E.$$

从而 A 可逆，且

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*. \qquad \square$$

设 A 为 n 阶方阵，当 $|A|=0$ 时，称 A 为**奇异(方)阵**. 否则，若 $|A|\neq 0$，则称 A 为**非奇异(方)阵**.

例 6 设 A,B 都是 n 阶方阵，且 AB 是可逆矩阵，则 A,B 都是可逆矩阵. 特别地，若 A,B 都是 n 阶方阵，且 $AB=E$，则 $A^{-1}=B$.

证 因为 AB 可逆，A、B 为方阵，所以 $|AB|=|A||B|\neq 0$，这时 $|A|\neq 0$ 且 $|B|\neq 0$，从而 A,B 都是可逆阵.

因 $AB=E$，所以 AB 可逆，又 A、B 为方阵，从而 A 可逆，在 $AB=E$ 两边的左边同乘 A^{-1} 得 $A^{-1}AB=A^{-1}E$，于是 $A^{-1}=B$.

例 7 设

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \qquad |A|\neq 0.$$

试证

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}\begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}.$$

证 由 $A_{11}=a_{22}, A_{12}=-a_{21}, A_{21}=-a_{12}, A_{22}=a_{11}$ 知

$$A^*=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix},$$

所以

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*=\frac{1}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}\begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}. \qquad \Box$$

利用例 7,可以方便地求出 2 阶可逆方阵的逆矩阵,例如

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{2\times4-1\times5}\begin{bmatrix} 4 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{4}{3} & -\frac{5}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}.$$

例 8 求满足矩阵方程 $AX=B$ 的矩阵 X,其中

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B=\begin{bmatrix} 8 & 3 \\ -5 & 9 \\ 2 & 15 \end{bmatrix}.$$

解 由于

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}=-27\neq0,$$

所以 A 可逆 . 且

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*=\frac{1}{-27}\begin{bmatrix} -3 & -6 & -6 \\ -6 & -3 & 6 \\ -6 & 6 & -3 \end{bmatrix}=\frac{1}{9}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

用 A^{-1} 左乘方程 $AX=B$ 两边得

$$X=A^{-1}B=\frac{1}{9}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 8 & 3 \\ -5 & 9 \\ 2 & 15 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{2}{9} & \frac{17}{3} \\ \frac{7}{9} & -\frac{5}{3} \\ \frac{28}{9} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

注意: 上例中 $X\neq BA^{-1}$.

可以看出,对高阶矩阵,用伴随矩阵法求 A^{-1} 是比较麻烦的,2.5 中将介绍一种比较方便的,用初等变换求 A^{-1} 的方法 .

如果 A 是可逆阵,我们规定

$$A^{-k}=(A^{-1})^k,$$

其中 k 是正整数 .

2.4 矩阵的初等变换与矩阵的秩

2.4.1 矩阵的初等变换

先看一个解线性方程组的例子 . 解方程组

$$\begin{cases} -2x_1 & -3x_2 & +4x_3 & =2 & ① \\ x_1 & +2x_2 & -x_3 & =-1 & ② \\ 2x_1 & +2x_2 & -8x_3 & =-2 & ③ \end{cases} \tag{4}$$

采用熟知的加、减消元法，有

$$\begin{cases} -2x_1 & -3x_2 & +4x_3 & =2 & ① \\ x_1 & +2x_2 & -x_3 & =-1 & ② \\ 2x_1 & +2x_2 & -8x_3 & =-2 & ③ \end{cases}$$

$$\xrightarrow[\frac{1}{2}\times ③]{①\leftrightarrow ②} \begin{cases} x_1 & +2x_2 & -x_3 & =-1 & ① \\ -2x_1 & -3x_2 & +4x_3 & =2 & ② \\ x_1 & +x_2 & -4x_3 & =-1 & ③ \end{cases}$$

$$\xrightarrow[③-①]{②+2\times ①} \begin{cases} x_1 & +2x_2 & -x_3 & =-1 & ① \\ & x_2 & +2x_3 & =0 & ② \\ & -x_2 & -3x_3 & =0 & ③ \end{cases}$$

$$\xrightarrow[③+②]{①-2\times ②} \begin{cases} x_1 & -5x_3 & =-1 & ① \\ x_2 & +2x_3 & =0 & ② \\ & -x_3 & =0 & ③ \end{cases}$$

得方程组的解：

$$x_1=-1,\quad x_2=0,\quad x_3=0.$$

在解线性方程组(4)的过程中，我们对方程组实施了三种变换：

(1)互换两个方程的位置；

(2)用一个非零数乘某一个方程；

(3)把一个方程的倍数加到另一个方程上去．

线性方程组的这三种变换，不改变方程组的解．

线性方程组(4)可以由矩阵

$$\begin{bmatrix} -2 & -3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & -8 & -2 \end{bmatrix}$$

确定．对方程组(4)实施的上述三种变换，用矩阵来表示就是：

$$\begin{bmatrix} -2 & -3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & -8 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\frac{1}{2}\times r_3]{r_1\leftrightarrow r_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ -2 & -3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & -4 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2+2\times r_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3+r_2]{r_1-2\times r_2}\begin{bmatrix}1&0&-5&-1\\0&1&2&0\\0&0&-1&0\end{bmatrix}.$$

定义 2.9 下面三种变换称为矩阵的**初等行变换**；

(1) 对调两行(对调 i,j 两行，记作 $r_i\leftrightarrow r_j$)；

(2) 以数 $k\neq0$ 乘某一行中的所有元素(用数 k 乘第 i 行，记作 $k\times r_i$)；

(3) 把某一行所有元素的 k 倍分别加到另一行对应的元素上去(第 j 行的 k 倍加到第 i 行上，记作 r_i+kr_j).

把上述定义中的"行"换成"列"，即得矩阵的**初等列变换**的定义(所有记号是把"r"换成"c").

矩阵的初等行变换与初等列变换，统称为**初等变换**．显然初等变换是可逆的，例如，矩阵 A 经过变换 r_i+kr_j 后，再通过变换 $r_i+(-k)r_j$ 便复原了．

如果矩阵 A 经有限次初等变换变成矩阵 B，则称**矩阵 A 与 B 等价**．

下面讨论利用矩阵的初等变换化简矩阵的问题．

称矩阵 A 为**行阶梯形矩阵**，如果 A 满足：

(1) 若 A 有零行，那么零行全部位于非零行的下方；

(2) 各个非零行的左起第一个非零元素的列序数由上至下严格递增．

例如

$$A=\begin{bmatrix}7&2&1&0&1\\0&0&1&0&2\\0&0&0&0&5\end{bmatrix},$$

$$B=\begin{bmatrix}3&1&0&2&1&5\\0&1&3&2&4&4\\0&0&0&0&7&6\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix},$$

都是行阶梯形矩阵．为方便，也称零矩阵为行阶梯形矩阵．

例 9 利用矩阵的初等行变换，将

$$A=\begin{bmatrix}3&2&3&4&5&9\\3&1&0&2&1&5\\0&1&3&2&6&10\\6&4&6&8&12&24\end{bmatrix}$$

化成行阶梯形矩阵．

解

$$A=\begin{bmatrix}3&2&3&4&5&9\\3&1&0&2&1&5\\0&1&3&2&6&10\\6&4&6&8&12&24\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_2-r_1]{r_4-2\times r_1}\begin{bmatrix}3&2&3&4&5&9\\0&-1&-3&-2&-4&-4\\0&1&3&2&6&10\\0&0&0&0&2&6\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3+r_2}\begin{bmatrix}3&2&3&4&5&9\\0&-1&-3&-2&-4&-4\\0&0&0&0&2&6\\0&0&0&0&2&6\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4-r_3]{-1\times r_2}\begin{bmatrix}3&2&3&4&5&9\\0&1&3&2&4&4\\0&0&0&0&2&6\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

一般地，可按如下方法将矩阵 A 经初等行变换化为行阶梯形矩阵．

对非零 $m\times n$ 矩阵 $A=(a_{ij})$，若其第一列元素全是零，便考查其第二列，依次下去，总可找到第一个非零列，然后从第一个非零列开始讨论．故不妨设 A 的第一列元素不全为零，若 $a_{11}=0$，总可经行的交换把第一列中一个非零元换到第一行上，故还可设 $a_{11}\neq 0$，将 A 的第一行的 $-a_{i1}/a_{11}$ 倍加到 A 的第 i 行上，$i=2,\cdots,m$，便可把 A 化成

$$A\longrightarrow\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\0&&&\\0&&A_1&\\\cdots&&&\\0&&&\end{bmatrix}.$$

A_1 为 $(m-1)\times(n-1)$ 矩阵，对 A_1 再进行类似的处理．最后，总可以把 A 化成行阶梯形矩阵．

称 A 为**行最简形矩阵**，如果：

（1） A 是行阶梯形矩阵；

（2） A 的非零行的左起第一个非零元素都是 1，并且这些 1 分别是它们所在列的唯一的非零元素．

一般地，任一矩阵 A 都可经初等行变换化成行最简形矩阵．比如对例 9 中的 A，继续实施初等行变换可得

$$A\longrightarrow\begin{bmatrix}3&2&3&4&5&9\\0&1&3&2&4&4\\0&0&0&0&2&6\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\frac{1}{2}\times r_3]{r_1-2\times r_2}\begin{bmatrix}3&0&-3&0&-3&-3\\0&1&3&2&4&4\\0&0&0&0&1&3\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_2-4\times r_3]{\frac{1}{3}\times r_1}\begin{bmatrix}1&0&-1&0&-1&-1\\0&1&3&2&0&-8\\0&0&0&0&1&3\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1+r_3}\begin{bmatrix}1&0&-1&0&0&2\\0&1&3&2&0&-8\\0&0&0&0&1&3\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

如果不限定使用初等行变换，而是行、列初等变换都可以使用，那么，任一矩阵都可化成如下形式的矩阵：

$$\begin{bmatrix}1&0&\cdots&0&\cdots&0\\0&1&\cdots&0&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&\cdots&1&\cdots&0\\0&0&\cdots&0&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&\cdots&0&\cdots&0\end{bmatrix}.$$

称其为该矩阵的标准形．其左上角是一个 r 阶单位阵，其余元素都是零．这种矩阵可简记为$\begin{pmatrix}E_r&0\\0&0\end{pmatrix}$．于是

$$A\xrightarrow{\text{初}}\begin{pmatrix}E_r&0\\0&0\end{pmatrix}.$$

注意：$\begin{pmatrix}E_n\\0\end{pmatrix}$，$(E_m\ 0)$及 E_n 都是$\begin{pmatrix}E_r&0\\0&0\end{pmatrix}$的特殊形式．

综上所述，我们得到如下结果：

(1)任一矩阵 A 都可经初等行变换化成行阶梯形矩阵；

(2)任一矩阵 A 都可经初等行变换化成行最简形；

(3)任一矩阵 A 都可经初等变换化成标准形．

因为初等变换是可逆的，所以如果 A 经过有限次初等变换能变成 B，则 B 经过有限次初等变换也能变成 A．

说明： 第(1)种初等行(列)变换，可由若干次第(2)和第(3)种初等行(列)变换来实现．如交换矩阵 A 的第 i 行和第 j 行 $A\xrightarrow{r_i\leftrightarrow r_j}A_4$，相当于进行下述初等变换：

$$A\xrightarrow{r_i+r_j}A_1\xrightarrow{r_j+(-1)r_i}A_2\xrightarrow{(-1)r_j}A_3\xrightarrow{r_i+(-1)r_j}A_4.$$

2.4.2　矩阵秩的概念与求法

上一节，我们曾指出任一矩阵 A 都可经初等变换化成标准形矩阵$\begin{pmatrix}E_r&0\\0&0\end{pmatrix}$．现在问：标准形$\begin{pmatrix}E_r&0\\0&0\end{pmatrix}$是否由 A 唯一确定．下面引入的矩阵秩的概念回答了这一问题．

将矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 的某些行和某些列划去(可以只划某些行或某些列),剩下元素按原来的顺序构成的新矩阵叫做矩阵 A 的**子(矩)阵**. 为方便起见,把 A 也看作它自身的子(矩)阵.

例如,设 $A=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 2\end{bmatrix}$,则(2),(2 1 0),$\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$,$\begin{bmatrix}2 & 0\\ 1 & 2\end{bmatrix}$,$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 2\end{bmatrix}$等,都是 A 的子阵.

称 A 的子方阵的行列式为 A 的**子式**.

例如

$$\begin{vmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 2\\ 3 & 2 & 2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}2 & 0\\ 1 & 2\end{vmatrix},|3|,|2|$$

等都是矩阵

$$A=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 2\\ 3 & 2 & 2\end{bmatrix}$$

的子式.

定义 2.10 矩阵 A 中非零子式的最高阶数叫作**矩阵 A 的秩**. 记为 $R(A)$.

如果 A 是零矩阵,规定 $R(A)=0$.

例如

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}.$$

因 A 的 2 阶以上(含 2 阶)子式全为 0,而 A 有 1 阶非零子式 $|1|\neq 0$,所以 $R(A)=1$.

很明显,若 A 是 $m\times n$ 的矩阵,则

(1) $0\leqslant R(A)\leqslant \min\{m,n\}$;

(2) $R(A')=R(A)$;

(3) $R(kA)=\begin{cases}0, & k=0\\ R(A), & k\neq 0;\end{cases}$

(4) $R(A_1)\leqslant R(A)$,其中 A_1 为 A 的任意一个子阵.

定理 2.3 矩阵经初等变换后,其秩不变.

证明 由于第(1)种初等变换可以由第(2)种和第(3)种初等变换实现,因此,只须证明第(2)和第(3)种初等变换不改变矩阵的秩. 现仅就初等行变换来证明,至于初等列变换,可类似地证明.

对于第(2)种初等行变换,变换前后,各阶子式至多相差 k 倍($k\neq 0$). 因此,这种变换不改变矩阵的秩.

对于第(3)种初等行变换,设 $A\xrightarrow{r_i+k\times r_j}A_1$,$R(A)=r$,$R(A_1)=r_1$,则必有 $r_1\leqslant r$. 事实上:对于 A_1 的任意一个 $r+1$ 阶子式(如果存在),或者它就是 A 的某 $r+1$ 阶子式(即它不含第 i 行),其值为 0;或者它包含变动的第 i 行,由行列式性质,可将它分解为 A 的一个 $r+1$ 阶子式与另一 $r+1$ 阶行列式的 k 倍之和. 前者的值当然是 0. 后一行列式又有两种可能:一种是它含有 A 的第 j 行,此时它有两行相同,其值为 0;另一种是不含 A 的第 j

行，此时它是 A 的一个 $r+1$ 阶子式，或经交换某两行后它等于 A 的一个 $r+1$ 阶子式，其值为 0. 总之，无论何时，其值都等于零．因此，A_1 中所有 $r+1$ 阶子式都是零．同理，A_1 中高于 r 阶的其它子式也都是零，故 $r_1 \leqslant r$. 另一方面 $A_1 \xrightarrow{r_i+(-k)r_j} A$，所以 $r \leqslant r_1$. 从而 $r = r_1$. □

由定理 2.3 可知

$$R(A)=r \Leftrightarrow A \xrightarrow{\text{初}} \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

即标准形 $\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 中的 r 就是 A 的秩，故 $\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 由 A 唯一确定．

定理 2.3 为我们提供了求矩阵秩的一个途径——初等变换法求矩阵的秩．

由矩阵秩的定义不难看出，行阶梯形矩阵的秩等于其非零行的个数，比如

$$R\begin{bmatrix} 1 & 8 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}=2, R\begin{bmatrix} 3 & 4 & 7 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 9 \end{bmatrix}=3.$$

这样，求矩阵 A 的秩时，只需将 A 经初等变换化成行阶梯形矩阵，其非零行的个数就是 A 的秩．

例 10 求矩阵

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & -4 \\ 2 & 4 & 6 & 2 & 5 \\ -1 & 2 & 9 & 4 & 7 \\ 3 & 2 & 7 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

的秩．

解 由

$$A \to \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 8 & 4 & 2 & 13 \\ 0 & 0 & 10 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

知 $R(A)=3$.

设 A 是 $m \times n$ 矩阵，若 $R(A)=n$，则称 A 为**列满秩阵**；若 $R(A)=m$，则称 A 为**行满秩阵**．若 A 为 n 阶方阵，且 $R(A)=n$，则称 A 为**满秩阵**．

例如

$$A=\begin{bmatrix} 7 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix},$$

因 A 为行阶梯形矩阵，有 3 个非零行，所以 $R(A)=3$，A 为行满秩阵．因为 A' 是 5×3 矩阵，并且 $R(A')=R(A)=3$，故 A' 是列满秩阵．

由矩阵秩的定义可知，n 阶方阵 A 的秩 $R(A)=n \Leftrightarrow |A| \neq 0$. 故 n 阶方阵 A 可逆 $\Leftrightarrow R(A)=n$.

由矩阵的初等变换不改变矩阵的秩可知：

(1) n 阶方阵 A 的秩 $R(A)=n \Leftrightarrow A \xrightarrow{\text{初}} E_n$;

(2) $m\times n$ 矩阵 A 是列满秩阵 $\Leftrightarrow A \xrightarrow{\text{初}} \begin{pmatrix} E_n \\ 0 \end{pmatrix}$;

(3) $m\times n$ 矩阵 A 是行满秩阵 $\Leftrightarrow A \xrightarrow{\text{初}} (E_m \quad 0)$.

2.5 初 等 阵

2.4 节介绍了矩阵的初等变换.这一节将建立初等变换与矩阵乘法的联系,并给出用初等变换求出可逆阵的逆矩阵的方法.

2.5.1 初等阵的概念

定义 2.11 由单位矩阵经一次初等变换得到的方阵称为初等(矩)阵.

初等阵共有三类.

(1) 把单位阵中第 i、j 两行(列)对调,得到初等矩阵

$$E(i,j)=\begin{bmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & 0 & \cdots & & 1 & & \\ & & & \vdots & 1 & & \vdots & & \\ & & & \vdots & & \ddots & \vdots & & \\ & & & \vdots & & 1 & \vdots & & \\ & & & 1 & \cdots & & 0 & & \\ & & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \leftarrow \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \\ \\ \leftarrow \text{第 } j \text{ 行.} \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

(2)以数 $k\neq 0$ 乘单位阵的某行(列),得到初等阵

$$E(j(k))=\begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & k & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \leftarrow \text{第 } i \text{ 行.} \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

(3)以数 k 乘单位阵的某一行(列)加到另一行(列)得到初等阵

$$E(i,j(k))=\begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & \cdots & k & & \\ & & & \ddots & \vdots & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \leftarrow \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \leftarrow \text{第 } j \text{ 行.} \\ \\ \\ \end{matrix}$$

2.5.2 初等阵的性质

初等阵满足下列性质：

(1)初等阵都是可逆阵，并且初等阵的逆矩阵还是初等阵．事实上，

$$E^{-1}(i,j)=E(i,j);$$

$$E^{-1}[i(k)]=E\left[i\left(\frac{1}{k}\right)\right],k\neq 0;$$

$$E^{-1}[i,j(k)]=E[i,j(-k)].$$

(2)初等阵的转置矩阵还是初等阵，事实上，

$$E'(i,j)=E(i,j);$$

$$E'[i(k)]=E[i(k)];$$

$$E'[i,j(k)]=E[j,i(k)].$$

(3)设 A 是 $m\times n$ 矩阵，对 A 施行一次初等行变换，其结果等于用一个相应的初等阵在左边乘 A，对 A 施行一次初等列变换，其结果等于用一个相应的初等阵在右边乘 A.

例如

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

$$E_m(i,j)A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}\begin{matrix} \\ \\ \leftarrow \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \leftarrow \text{第 } j \text{ 行} \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$E_m(i(k))A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}\begin{matrix} \\ \\ \leftarrow \text{第 } i \text{ 行}, \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$E_m(i,j(k))A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1}+ka_{j1} & a_{i2}+ka_{j2} & \cdots & a_{in}+ka_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \leftarrow \text{第 } i \text{ 行}.$$

具体地：

以 $E_m(i,j)$ 左乘矩阵 A，其结果相当于交换 A 的第 i,j 两行，以 $E_n(i,j)$ 右乘矩阵 A，其结果相当于交换 A 的第 i,j 两列．即

$$E_m(i,j)A=B \Leftrightarrow A \xrightarrow{r_i \leftrightarrow r_j} B,$$

$$AE_n(i,j)=B \Leftrightarrow A \xrightarrow{c_i \leftrightarrow c_j} B.$$

以 $E_m(i(k))$ 左乘矩阵 A，其结果相当于以数 k 乘 A 的第 i 行，以 $E_n(i(k))$ 右乘矩阵 A，其结果相当于以数 k 乘 A 的第 i 列．即

$$E_m(i(k))A=B \Leftrightarrow A \xrightarrow{k \times r_i} B,$$

$$AE_n(i(k))=B \Leftrightarrow A \xrightarrow{k \times c_i} B.$$

以 $E_m(i,j(k))$ 左乘矩阵 A，其结果相当于把 A 的第 j 行乘 k 加到第 i 行．以 $E_n(i,j(k))$ 右乘矩阵 A，其结果相当于把 A 的第 i 列乘 k 加到第 j 列．即

$$E_m(i,j(k))A=B \Leftrightarrow A \xrightarrow{r_i + k \times r_j} B,$$

$$AE_n(i,j(k))=B \Leftrightarrow A \xrightarrow{c_j + k \times c_i} B.$$

注意：以 $E_n(i,j(k))$ 右乘矩阵 A，其结果相当于把 A 的第 i 列(不是 j 列)乘 k 加到第 j 列(不是 i 列)．

2.5.3 矩阵等价的充要条件

首先，利用初等阵刻画一下可逆阵．

定理 2.4 矩阵 A 可逆的充要条件是：存在有限个初等阵 $P_1,P_2,\cdots,P_k$，使 $A=P_1P_2\cdots P_k$．

证明 充分性：设有初等阵 $P_1,P_2,\cdots,P_k$，使

$$A=P_1P_2\cdots P_k.$$

因初等阵是可逆阵，且可逆阵之积还是可逆阵，所以 A 可逆．

必要性：设 A 是可逆阵．所以 $R(A)=n$，A 经初等变换可以化成 E，从而经有限次初等变换可以将 E 变成 A．也就是说，存在有限个初等阵 $P_1,P_2,\cdots P_l,P_{l+1},\cdots,P_k$，使

$$P_1P_2\cdots P_lEP_{l+1}\cdots P_k=A,$$

即

$$A=P_1P_2\cdots P_k. \quad \square$$

推论 2.1 两个 $m\times n$ 矩阵 A,B 等价的充要条件是：存在 m 阶可逆阵 P 及 n 阶可逆阵 Q，使 $PAQ=B$．

证明 必要性：由 A 与 B 等价的定义，知存在有限个 m 阶初等阵 $P_1,P_2,\cdots,P_s$ 及有

限个 n 阶初等阵 $Q_1,Q_2,\cdots,Q_t$，使

$$P_1P_2\cdots P_sAQ_1Q_2\cdots Q_t=B,$$

令

$$P=P_1P_2\cdots P_s;\quad Q=Q_1Q_2\cdots Q_t.$$

由定理 4 知道 P 是 m 阶可逆阵，Q 是 n 阶可逆阵，且 $PAQ=B$.

充分性：因 P、Q 可逆，由定理 4 知，存在有限个初等阵 $P_1,P_2,\cdots,P_s,Q_1,Q_2,\cdots,Q_t$，使

$$P=P_1P_2\cdots P_s;\quad Q=Q_1Q_2\cdots Q_t.$$

从而，由 $PAQ=B$ 知

$$P_1P_2\cdots P_sAQ_1Q_2\cdots Q_t=B.$$

这表明，A 可经初等变换化成 B. □

由推论 2.1 的证明可以看出，矩阵 A 经初等行变换化成 B 的充要条件是存在可逆阵 P 使 $PA=B$. 矩阵 A 经初等列变换化成 B 的充要条件是存在可逆阵 Q 使 $AQ=B$.

由本章定理 2.3 及推论 2.1，可立即得到推论 2.2.

推论 2.2 设 A 是 $m\times n$ 矩阵，P 是 m 阶可逆阵，Q 是 n 阶可逆阵．则矩阵 PA,AQ,PAQ 的秩都等于 A 的秩，即

$$R(PA)=R(AQ)=R(PAQ)=R(A).$$

推论 2.3 设 A 是可逆阵，则可以只经过初等行变换将 A 化成单位阵 E.

证明 因 A 可逆，所以 A^{-1} 可逆，由定理 2.4，存在初等阵 $P_1,P_2,\cdots,P_s$，使 $A^{-1}=P_1P_2\cdots P_s$，于是

$$A^{-1}A=P_1P_2\cdots P_sA=E.$$

这表明，只经过初等行变换便可将 A 化成 E. □

2.5.4 求逆矩阵的另一方法

设 A 是 n 阶可逆阵，于是存在初等阵 $P_1,P_2,\cdots,P_s$，使

$$P_1P_2\cdots P_sA=E, \tag{5}$$

故

$$P_1P_2\cdots P_sE=A^{-1}. \tag{6}$$

式(5)和式(6)表明，若经过一系列初等行变换可将 A 变成 E，则施行同样的一系列初等行变换将把 E 变成 A^{-1}. 于是，对矩阵$(A\vdots E)$(它是在 A 的右边添写一个 n 阶单位阵得到 $n\times 2n$ 阶矩阵)施行初等行变换，当其中的 A 化成 E 时，E 就化成了 A^{-1}.

例 11 求 A 的逆矩阵

$$A=\begin{bmatrix}-2 & 1 & 0\\ 1 & -2 & 1\\ 0 & 1 & -2\end{bmatrix}.$$

解 由于

$$[A\vdots E]=\left[\begin{array}{ccc:ccc}-2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&-2&1&0&1&0\\-2&1&0&1&0&0\\0&1&-2&0&0&1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_2+2r_1}\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&-2&1&0&1&0\\0&-3&2&1&2&0\\0&1&-2&0&0&1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_3}\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&-2&1&0&1&0\\0&1&-2&0&0&1\\0&-3&2&1&2&0\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_3+3r_2}\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&-2&1&0&1&0\\0&1&-2&0&0&1\\0&0&-4&1&2&3\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[r_1+(\frac{1}{4})r_3]{r_2+(-\frac{1}{2})r_3}\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&-2&0&\frac{1}{4}&\frac{3}{2}&\frac{3}{4}\\0&1&0&-\frac{1}{2}&-1&-\frac{1}{2}\\0&0&-4&1&2&3\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[(-\frac{1}{4})\times r_3]{r_1+2r_2}\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&-\frac{3}{4}&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{4}\\0&1&0&-\frac{1}{2}&-1&-\frac{1}{2}\\0&0&1&-\frac{1}{4}&-\frac{1}{2}&-\frac{3}{4}\end{array}\right],$$

故

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}-\frac{3}{4}&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{4}\\-\frac{1}{2}&-1&-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{4}&-\frac{1}{2}&-\frac{3}{4}\end{bmatrix}.$$

此外,设 A 可逆,若 $(A \vdots B)\xrightarrow{\text{行}}(E \vdots C)$,则 $C=A^{-1}B$.

类似地:设 A 可逆,若 $\begin{bmatrix}A\\E\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{列}}\begin{bmatrix}E\\C\end{bmatrix}$,则 $C=A^{-1}$;若 $\begin{bmatrix}A\\B\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{列}}\begin{bmatrix}E\\C\end{bmatrix}$,则 $C=BA^{-1}$.

2.6 分块矩阵

2.6.1 分块矩阵的概念

对于行数和列数较大的矩阵 A,经常采用"矩阵分块法",即将一个大矩阵看成是以一

些小矩阵为元素的矩阵．在运算中，常常把这些小矩阵当作“元素”来处理．

将矩阵 A 用若干条纵线和横线分成许多小矩阵，每个小矩阵称为 A 的一个**子块**．以这些子块为元素的形式上的矩阵称为分块阵．例如矩阵

$$A=\left[\begin{array}{ccc:cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ \hdashline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \end{array}\right].$$

令

$$A_{11}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}, \qquad A_{12}=\begin{bmatrix} a_{14} & a_{15} \\ a_{24} & a_{25} \end{bmatrix},$$

$$A_{21}=(a_{31} \quad a_{32} \quad a_{33}), \qquad A_{32}=(a_{34} \quad a_{35}).$$

则

$$A=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

就是分块阵．

显然，一个矩阵可以根据需要表示成不同的分块阵．例如 2×3 矩阵 $A=(a_{ij})$ 就有 8 种不同的分块形式：

$$(1)\ \left[\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \hdashline a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{array}\right], \qquad (2)\ \left[\begin{array}{c:c:c} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{array}\right],$$

$$(3)\ \left[\begin{array}{c:cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{array}\right], \qquad (4)\ \left[\begin{array}{cc:c} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{array}\right],$$

$$(5)\ \left[\begin{array}{c:cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \hdashline a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{array}\right], \qquad (6)\ \left[\begin{array}{cc:c} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \hdashline a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{array}\right],$$

$$(7)\ \left[\begin{array}{c:c:c} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \hdashline a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{array}\right], \qquad (8)\ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}.$$

为方便，可将 A 自己视为 1 个子块，也可将 A 的每个元素视为子块．

2.6.2 分块阵的运算

下面讨论将矩阵分块之后，如何进行加法、数乘、乘法、转置等运算.

分块阵的加法与数乘：

设矩阵 A 与 B 的行数、列数分别相同，并且 A 与 B 的分块方法也相同，则 A 与 B 相加时可将对应子块相加；数 k 与 A 相乘时，可将 k 乘到各子块上去．例如，设

$$A=\begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1t} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{st} \end{bmatrix}, \qquad B=\begin{bmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1t} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ B_{s1} & \cdots & B_{st} \end{bmatrix},$$

则

$$A+B=\begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1t} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{st} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1t} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ B_{s1} & \cdots & B_{st} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} A_{11}+B_{11} & \cdots & A_{1t}+B_{1t} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{s1}+B_{s1} & \cdots & A_{st}+B_{st} \end{bmatrix};$$

$$kA=k\begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1t} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{st} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} kA_{11} & \cdots & kA_{1t} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ kA_{s1} & \cdots & kA_{st} \end{bmatrix}.$$

分块阵的乘法：

设 A 为 $m\times p$ 矩阵，B 是 $p\times n$ 矩阵，并且分块表示成

$$A=\begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1t} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{st} \end{bmatrix}, \qquad B=\begin{bmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1r} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ B_{t1} & \cdots & B_{tr} \end{bmatrix},$$

其中对 A 的列的分法与对 B 的行的分法完全一致，即 $A_{i1},A_{i2},\cdots,A_{it}$的列数分别等于 $B_{1j},B_{2j},\cdots,B_{tj}$的行数，$i=1,2,\cdots,s;j=1,2,\cdots,r$. 则

$$AB=\begin{bmatrix} C_{11} & \cdots & C_{1r} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ C_{s1} & \cdots & C_{sr} \end{bmatrix},$$

其中 $C_{ij}=\sum\limits_{k=1}^{t}A_{ik}B_{kj},\quad i=1,2,\cdots,s;\quad j=1,2,\cdots,r.$

利用分块矩阵的乘法，可以说明许多问题．比如，若 AB 有意义，将 B 按列分块，记 $B=(B_1\ B_2\cdots B_s)$，则

$$AB=(AB_1\ AB_2\cdots\ AB_s).$$

从而有

$$AB=0\Leftrightarrow AB_i=0,i=1,2,\cdots,s.$$

即 $AB=0$ 的充要条件是 B 的每一列 B_i 都是方程 $AX=0_{m\times s}$的解．

分块阵的转置矩阵：

设

$$A=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1t} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{s1} & A_{s2} & \cdots & A_{st} \end{bmatrix},$$

则

$$A'=\begin{bmatrix} A_{11}' & \cdots & A_{s1}' \\ A_{12}' & \cdots & A_{s2}' \\ \vdots & & \vdots \\ A_{1t}' & \cdots & A_{st}' \end{bmatrix}.$$

特别地

$$(A_1 \quad A_2 \quad \cdots \quad A_t)' = \begin{bmatrix} A_1' \\ A_2' \\ \vdots \\ A_t' \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_t \end{bmatrix}' = (B'_1 \quad B'_2 \quad \cdots \quad B'_t).$$

例 12 设 A 是 $m\times n$ 矩阵，B 是 $m\times p$ 矩阵，计算

$$\begin{bmatrix} A & B \\ 0_{p\times n} & 2E_p \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} 0_{m\times p} \\ E_p \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 0_{n\times p} \\ -E_p \end{bmatrix}.$$

解

$$\begin{bmatrix} A & B \\ 0_{p\times n} & 2E_p \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} 0_{m\times p} \\ E_p \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 0_{n\times p} \\ -E_p \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} A' & 0_{n\times p} \\ B' & 2E_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0_{m\times p} \\ E_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0_{n\times p} \\ -2E_p \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} A'\,0_{m\times p} + 0_{n\times p}E_p \\ B'\,0_{m\times p} + 2E_pE_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0_{n\times p} \\ -2E_p \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0_{n\times p} \\ 2E_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0_{n\times p} \\ -2E_p \end{bmatrix}$$

$$= 0_{(n+p)\times p}.$$

2.6.3 分块对角阵与分块三角阵

形如

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{bmatrix} \tag{7}$$

的分块阵称为**分块对角阵**.

形如式(7)的分块对角阵 A 具有下述性质：

(1) 当 $A_1, A_2, \cdots, A_s$ 都是方阵时

$$A^m = \begin{bmatrix} A_1^m & & & \\ & A_2^m & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s^m \end{bmatrix}.$$

(2) 当 $A_1, A_2, \cdots, A_s$ 都是方阵时，由行列式定义可得

$$|A| = |A_1||A_2|\cdots|A_s|.$$

(3) 当$|A_i|\neq 0, i=1,2,\cdots,s$,时,$A$ 可逆,并且

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} A_1^{-1} & & & \\ & A_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s^{-1} \end{bmatrix}.$$

类似地(注意区别):

$$\begin{bmatrix} & & & A_1 \\ & & A_2 & \\ & ⋰ & & \\ A_s & & & \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} & & & A_s^{-1} \\ & & A_{s-1}^{-1} & \\ & ⋰ & & \\ A_1^{-1} & & & \end{bmatrix}.$$

例 13 设

$$A=\begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

求$|A|$及A^{-1}.

解

$$|A|=\begin{vmatrix} 9 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 9 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$=9\times 6=54.$$

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} & O \\ O & \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \frac{1}{9} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{9} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

形如

$$A=\begin{bmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & * & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{bmatrix} \text{或} A=\begin{bmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & * & \ddots & \\ & & & A_s \end{bmatrix}$$

的分块阵称为**分块三角阵**.

由行列式定义可知，当 A、B 都是方阵时，

$$\begin{vmatrix} A & C \\ 0 & B \end{vmatrix}=|A||B|.$$

同理

$$\begin{vmatrix} A & 0 \\ D & B \end{vmatrix}=|A||B|.$$

从而，分块三角阵$\begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix}$（或$\begin{bmatrix} A & 0 \\ D & B \end{bmatrix}$）可逆的充要条件是$|A||B|\neq 0$.

例 14 设 A 是 n 阶非奇异矩阵，B 是 $n\times 1$ 矩阵，b 是常数，A^* 是 A 的伴随阵，记

$$P=\begin{bmatrix} E & 0 \\ -B'A^* & |A| \end{bmatrix},\quad Q=\begin{bmatrix} A & B \\ B' & b \end{bmatrix}.$$

试证：PQ 可逆$\Leftrightarrow B'A^{-1}B\neq b$.

证明
$$PQ=\begin{bmatrix} E & 0 \\ -B'A^* & |A| \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & B \\ B' & b \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} A & B \\ -B'A^*A+|A|B' & -B'A^*B+|A|b \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & -B'|A|A^{-1}B+|A|b \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & |A|(b-B'A^{-1}B) \end{bmatrix}.$$

$$|PQ|=|A|^2(b-B'A^{-1}B).$$

因 A 非奇异知$|A|\neq 0$，故$|PQ|\neq 0\Leftrightarrow B'A^{-1}B\neq b$，从而 PQ 可逆的充要条件是 $B'A^{-1}B\neq b$（可利用 PQ 可逆当且仅当 Q 可逆给出一个简单证明）.

2.7 分块阵的初等变换

2.7.1 分块阵初等变换的概念

在理论推演中，常用到分块阵的初等变换，它是矩阵初等变换的简缩形式. 分块阵的初等变换是指对分块阵施行的如下三种变换：

(1)交换分块阵的某两行(列)；

(2)用某一可逆阵 P 在左边(右边)乘分块阵的某一行(列);

(3)用某一矩阵 K 在左边(右边)去乘分块阵的某一行(列)加到另一行(列)上去.

这里的分块及运算都假设是可行的,以下同.

为方便,我们以 $M=\begin{pmatrix} A & C \\ D & B \end{pmatrix}$ 为例,讨论分块阵的初等变换.

对分块单位矩阵实施一次分块阵初等变换得到的矩阵称为分块初等阵.比如,对

$$E=\begin{bmatrix} E_m & 0 \\ 0 & E_m \end{bmatrix}$$

进行一次分块阵的初等变换得到:

(1) $\begin{bmatrix} 0 & E_n \\ E_m & 0 \end{bmatrix}$或$\begin{bmatrix} 0 & E_m \\ E_n & 0 \end{bmatrix}$;

(2) $\begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & E_n \end{bmatrix}$或$\begin{bmatrix} E_m & 0 \\ 0 & P \end{bmatrix}$,其中 P 可逆;

(3) $\begin{bmatrix} E_m & 0 \\ K & E_n \end{bmatrix}$或$\begin{bmatrix} E_m & K \\ 0 & E_n \end{bmatrix}$.

这些都是分块初等矩阵.

与 2.5.2 节中初等矩阵左(右)乘矩阵的效果类似,用分块初等矩阵左(右)乘给定的分块阵 M,只要乘法可行,其结果就是对 M 作相应的分块阵的初等变换.事实上,当分块初等阵在左边乘$\begin{bmatrix} A & C \\ D & B \end{bmatrix}$时,有

$$\begin{bmatrix} 0 & E \\ E & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & C \\ D & B \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} D & B \\ A & C \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} P & \\ & E \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & C \\ D & B \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} PA & PC \\ D & B \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} E & 0 \\ K & E \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & C \\ D & B \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A & C \\ KA+D & KC+B \end{bmatrix}.$$

其中 P 可逆,当分块初等阵在右边乘$\begin{bmatrix} A & C \\ D & B \end{bmatrix}$时,有

$$\begin{bmatrix} A & C \\ D & B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & E \\ E & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} C & A \\ B & D \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} A & C \\ D & B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & E \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} AP & C \\ DP & B \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} A & C \\ D & B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E & 0 \\ K & E \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A+CK & C \\ D+BK & B \end{bmatrix}.$$

其中 P 可逆.由此可知,对分块阵进行一次分块初等行(列)变换,相当于对矩阵进行一系列行(列)初等变换.从而下列事实成立:

(1) 对分块阵进行分块初等变换,不改变这个分块阵的秩.

(2) 对分块方阵进行第 3 类分块初等变换,不改变这个分块方阵的行列式的值.

(3) 如果 A、B 为方阵,且

$$\begin{bmatrix} A & C & \vdots & E & 0 \\ D & B & \vdots & 0 & E \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{行}} \begin{bmatrix} E & 0 & \vdots & A_1 & C_1 \\ 0 & E & \vdots & D_1 & B_1 \end{bmatrix},$$

那么

$$\begin{bmatrix} A & C \\ D & B \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A_1 & C_1 \\ D_1 & B_1 \end{bmatrix}.$$

利用这些性质,可以解决数学中的许多问题．下面举例说明这些应用．

例 15 试证行列式乘法公式：

$$|AB| = |A||B|,$$

其中 A,B 都是 n 阶方阵．

证明 由于对分块阵进行第 3 类分块初等变换不改变方阵的行列式．于是

$$|AB| = \begin{vmatrix} AB & 0 \\ E_n & E_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -AB \\ E_n & E_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -AB \\ E_n & 0 \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} 0 & -AB \\ E_n & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & 0 \\ E_n & B \end{vmatrix} = |A||B|. \qquad \square$$

例 16 设 A 是 n 阶可逆阵,B 是 m 阶方阵,试证

$$\begin{vmatrix} A & C \\ D & B \end{vmatrix} = |A||B-DA^{-1}C|.$$

证

$$\begin{vmatrix} A & C \\ D & B \end{vmatrix} \xlongequal{r_2+(-DA^{-1})r_1} \begin{vmatrix} A & C \\ 0 & B-DA^{-1}C \end{vmatrix}$$
$$= |A||B-DA^{-1}C|. \qquad \square$$

二阶行列式的对角线展开法则,不适合于分块阵．但是,如果 A、B、C 和 D 都是 n 阶方阵,A 可逆,且 $AC=CA$,则(习题 31)

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |AD-CB|.$$

例 17 设 A 是 $m\times n$ 矩阵,B 是 $n\times m$ 矩阵,证明

$$|E_m-AB| = |E_n-BA| \tag{8}$$

证明 构造分块矩阵$\begin{bmatrix} E_m & A \\ B & E_n \end{bmatrix}$. 由分块阵的第 3 类初等变换不改变行列式的值,得

$$\begin{vmatrix} E_m & A \\ B & E_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} E_m & A \\ 0 & E_n-BA \end{vmatrix} = |E_n-BA|,$$
$$\begin{vmatrix} E_m & A \\ B & E_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} E_m-AB & A \\ 0 & E_n \end{vmatrix} = |E_m-AB|.$$

于是

$$|E_m-AB| = |E_n-BA|.$$

式(8)表明,当 $m>n$ 时,可以把 m 阶行列式 $|E_m-AB|$ 转化为 n 阶行列式 $|E_n-BA|$ 来计算．利用(8)式,还可证明当 $m\geqslant n$,$\lambda\neq 0$ 时

$$|\lambda E_m-AB| = \lambda^{m-n}|\lambda E_n-BA|.$$

事实上：

$$|\lambda E_m-AB|=\lambda^m|E_m-\frac{1}{\lambda}AB|=\lambda^m|E_n-\frac{1}{\lambda}BA|=\lambda^{m-n}|\lambda E_n-BA|.$$

例 18 设 A 是 m 阶可逆阵，B 是 n 阶可逆阵，C 是 $m\times n$ 矩阵，D 是 $n\times m$ 矩阵，试证

$$\begin{bmatrix}0 & A\\ B & 0\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}0 & B^{-1}\\ A^{-1} & 0\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}A & C\\ 0 & B\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1}\\ 0 & B^{-1}\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}A & 0\\ D & B\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}A^{-1} & 0\\ -B^{-1}DA^{-1} & B^{-1}\end{bmatrix},\begin{bmatrix}C & A\\ B & 0\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}0 & B^{-1}\\ A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1}\end{bmatrix}.$$

证 因为

$$\left[\begin{array}{cc:cc}C & A & E_m & 0\\ B & 0 & 0 & E_n\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_1+(-CB^{-1})r_2}\left[\begin{array}{cc:cc}0 & A & E_m & -CB^{-1}\\ B & 0 & 0 & E_n\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}\left[\begin{array}{cc:cc}B & 0 & 0 & E_n\\ 0 & A & E_m & -CB^{-1}\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[(B^{-1})r_1]{(A^{-1})r_2}\left[\begin{array}{cc:cc}E_n & 0 & 0 & B^{-1}\\ 0 & E_m & A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1}\end{array}\right].$$

所以

$$\begin{bmatrix}C & A\\ B & 0\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}0 & B^{-1}\\ A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1}\end{bmatrix}.$$

其余类似可证，请读者自己证明．

2.7.2 利用分块阵的初等变换计算矩阵的秩

在 2.4 节，我们曾介绍了矩阵秩的四条性质．下面利用分块阵的初等变换，再给出矩阵秩的几条性质．

(1) $R\begin{bmatrix}A & 0\\ 0 & B\end{bmatrix}=R(A)+R(B)$；

(2) $R\begin{bmatrix}A & C\\ 0 & B\end{bmatrix}\geqslant R(A)+R(B)$；

(3) $R(A\quad B)\leqslant R(A)+R(B)$；

(4) $R(A+B)\leqslant R(A)+R(B)$；

(5) $R(AB)\leqslant \min\{R(A),R(B)\}$；

(6) 设 A 为 $m\times n$ 矩阵，B 为 $n\times p$ 矩阵，则

$$R(AB)\geqslant R(A)+R(B)-n,$$

特别地，当 $AB=0$ 时，$R(A)+R(B)\leqslant n$.

证 (1)设 $R(A)=r_1,R(B)=r_2$，则存在可逆阵 P_1,Q_1,P_2,Q_2，使

$$P_1AQ_1=\begin{bmatrix}E_{r_1} & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix},\qquad P_2BQ_2=\begin{bmatrix}E_{r_2} & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}.$$

于是

$$\begin{bmatrix}A & 0\\ 0 & B\end{bmatrix}\xrightarrow[\substack{c_1(Q_1)\\ c_2(Q_2)}]{\substack{(P_1)r_1\\ (P_2)r_2}}\begin{bmatrix}E_{r_1} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & E_{r_2} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

所以

$$R\begin{bmatrix}A & 0\\ 0 & B\end{bmatrix}=r_1+r_2=R(A)+R(B).$$

可以类似地证明(2)和(3),请读者自证之.

(4)由 $$\begin{bmatrix}A & 0\\ 0 & B\end{bmatrix}\xrightarrow[c_2+c_1]{r_1+r_2}\begin{bmatrix}A & A+B\\ 0 & B\end{bmatrix}$$

得

$$R(A)+R(B)=R\begin{bmatrix}A & 0\\ 0 & B\end{bmatrix}=R\begin{bmatrix}A & A+B\\ 0 & B\end{bmatrix}\geqslant R(A+B).$$

(5)设 A 是 $m\times n$ 矩阵,B 是 $n\times p$ 矩阵,

由

$$(A,0_{m\times p})\xrightarrow{c_2+c_1(B)}(A,AB),$$

$$\begin{bmatrix}B\\ 0_{m\times p}\end{bmatrix}\xrightarrow{r_2+(A)r_1}\begin{bmatrix}B\\ AB\end{bmatrix},$$

知

$$R(A)=R(A,0_{m\times p})=R(A,AB)\geqslant R(AB),$$

$$R(B)=R\begin{bmatrix}B\\ 0_{m\times p}\end{bmatrix}=R\begin{bmatrix}B\\ AB\end{bmatrix}\geqslant R(AB).$$

所以

$$R(AB)\leqslant\min\{R(A),R(B)\}.$$

(6)设 A 是 $m\times n$ 矩阵,B 是 $n\times p$ 矩阵,

由

$$\begin{bmatrix}A & 0\\ E_n & B\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}0 & -AB\\ E_n & B\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}0 & -AB\\ E_n & 0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}E_n & 0\\ 0 & AB\end{bmatrix}$$

知 $R(A)+R(B)\leqslant R\begin{bmatrix}A & 0\\ E_n & B\end{bmatrix}=R\begin{bmatrix}E_n & 0\\ 0 & AB\end{bmatrix}=R(E_n)+R(AB)=n+R(AB)$,

即

$$R(AB)\geqslant R(A)+R(B)-n.\qquad \Box$$

例 19 设 A 为 n 阶方阵,且 $3E_n+4A-4A^2=0$,则 $R(E_n+2A)+R(3E_n-2A)=n$.

证 由 $3E_n+4A-4A^2=0$,得

$$(E_n+2A)(3E_n-2A)=0.$$

由上述性质(6)知

$$R(E_n+2A)+R(3E_n-2A)\leqslant n,$$

由$(E_n+2A)+(3E_n-2A)=4E_n$，及上述性质(4)得

$$R(E_n+2A)+R(3E_n-2A)\geqslant R(4E_n)=R(E_n)=n.$$

综合之，得

$$R(E_n+2A)+R(3E_n-2A)=n. \qquad \square$$

习 题 二

1. 设：$A=\begin{bmatrix}2&2\\-3&5\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}-1&2\\4&3\end{bmatrix}$，$C=\begin{bmatrix}5&4\\13&-1\end{bmatrix}$，

   计算：(1) $A+B$； (2) $A-B$； (3) $2A+3C+B$.

2. 设：$A_1=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$，$A_2=\begin{bmatrix}-1\\0\\-3\end{bmatrix}$，$A_3=\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix}$，求$\frac{1}{3}A_1+\frac{1}{4}A_2+\frac{1}{12}A_3$.

3. 计算：

(1) $\begin{bmatrix}4&3&1\\1&-2&3\\5&7&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7\\2\\1\end{bmatrix}$；　　(2) $\begin{bmatrix}1\\4\\1\\1\end{bmatrix}(1\quad 3\quad 2\quad 1)$；

(3) $(1\quad 3\quad 2\quad 1)\begin{bmatrix}1\\4\\1\\1\end{bmatrix}$；　　(4) $\begin{bmatrix}2&1&3\\0&1&-1\\1&2&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\2&3\\3&1\end{bmatrix}$；

(5) $\begin{bmatrix}k_1&&\\&k_2&\\&&k_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\\a_{31}&a_{32}\end{bmatrix}$；　　(6) $\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}k_1&&\\&k_2&\\&&k_3\end{bmatrix}$；

(7) $\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$；　　(8) $(x_1\quad x_2\quad x_3)\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$.

4. 设A,B都是n阶方阵，证明：

   (1) 当且仅当$AB=BA$时，$(A\pm B)^2=A^2\pm 2AB+B^2$；

   (2) 当且仅当$AB=BA$时，$A^2-B^2=(A+B)(A-B)$；

   (3) 如果$AB=BA$，则$(A+B)^m=\sum_{k=0}^{m}C_m^kA^kB^{m-k}$，$(m\geqslant 1)$，

其中C_m^k表示从m个不同的元素中，取出k个不同元素的组合数.

5. 计算(n为自然数)：

(1) $\begin{bmatrix} k_1 & & \\ & k_2 & \\ & & k_3 \end{bmatrix}^n$；　　(2) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^n$；

(3) $\begin{bmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^n$；　　(4) $\begin{bmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^n$；

(5) $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}^n$；　　(6) $\left[\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}(2\ \ 1\ \ 2)\right]^n$.

6. 求下列矩阵的行列式(n 为自然数)：

(1) $-\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$；　　(2) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}^4$；

(3) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$；　　(4) $\begin{bmatrix} -3 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \end{bmatrix}^{2n}$.

7. 试证：当且仅当 $AB=BA$ 时，$(AB)'=A'B'$.

8. 求下列矩阵的逆阵：

(1) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 5 & -4 & 1 \end{bmatrix}$；　　(2) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$；

(3) $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$；　　(4) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$；

(5) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$；　　(6) $\begin{bmatrix} 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$，$\prod_{i=1}^{n} a_i \neq 0$.

9. 求下列等式中的矩阵 X：

(1) $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}X=\begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$；　　(2) $X\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}$；

(3) $\begin{bmatrix}1 & 4\\-1 & 2\end{bmatrix}X\begin{bmatrix}2 & 0\\-1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}$;

(4) $A^*X=A^{-1}+2X$,其中 $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\-1 & 1 & 1\\1 & -1 & 1\end{pmatrix}$.

10. 设 $A=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\1 & 2 & 0\\1 & 1 & 2\end{bmatrix}$,满足 $AB=A+B$,求 B.

11. 已知 $AP=PB$,其中

$$B=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & -1\end{bmatrix},\qquad P=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\2 & -1 & 0\\2 & 1 & 1\end{bmatrix},$$

求 A 及 A^9.

12. 求下列矩阵的秩:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1 & 0\\1 & 1 & 1 & 1\\1 & 2 & 1 & 2\end{bmatrix};\qquad B=\begin{bmatrix}1 & 3 & 2 & 1\\1 & 2 & 1 & 1\\2 & 5 & 3 & 2\end{bmatrix};$$

$$C=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\x & 4 & 6\\3 & y & 9\end{bmatrix};\qquad D=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0 & a\\0 & 1 & -1 & b\\-1 & 0 & 1 & c\end{bmatrix}.$$

13. 设 $A(E-C^{-1}B)'C'=E$,其中

$$B=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0 & 0\\0 & 1 & -1 & 0\\0 & 0 & 1 & -1\\0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix},\qquad C=\begin{bmatrix}2 & 1 & 3 & 4\\0 & 2 & 1 & 3\\0 & 0 & 2 & 1\\0 & 0 & 0 & 2\end{bmatrix},$$

求 A.

14. 试证:若对某正整数 k,方阵 $A^k=0$,则

$$(E-A)^{-1}=E+A+\cdots+A^{k-1}.$$

15. 设

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 2 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix},\qquad C=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 2 & 0\\1 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

B 为 3 阶可逆阵,求:

(1) $(A+3E)^{-1}(A^2-9E)$;

(2) $(BC'-E)'(AB^{-1})'+[(BA^{-1})']^{-1}$.

16. 设 A 为 n 阶方阵,$f(x)=x^m+a_{m-1}x^{m-1}+\cdots+a_1x+a_0$, $a_0\neq0$,且 $f(A)=0$,

试证 A 可逆，并用 A 表示 A^{-1}.

17. 设 A 是 $m\times n$ 矩阵，若对任意 $n\times 1$ 矩阵 X 都有 $AX=0_{m\times 1}$，试证 $A=0$.

18. 设 A 是 n 阶实对称阵，且 $A^2=0$，证明 $A=0$.

19. 设 $A^2=E_n$，证明 $R(A+E_n)+R(A-E_n)=n$.

20. 设 A 是 $m\times n$ 矩阵，B 是 $n\times p$ 矩阵，$R(A)=n$，试证 $R(AB)=R(B)$.

21. 设 A,B 都是 $m\times n$ 矩阵，A 经初等行变换可化成 B，若记

$$A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n),\quad B=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n),$$

则当 $\beta_i=\sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}k_j\beta_j$ 时，$\alpha_i=\sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}k\alpha_j$.

22. 求 $\begin{bmatrix}1 & -\tan\dfrac{\pi}{3}\\ \sqrt{3} & 1\end{bmatrix}^n$，其中 n 为自然数.

23. 求 $\begin{bmatrix}3 & 4 & 0 & 0\\ 4 & -3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 2\end{bmatrix}^{2n}$.

24. 设 A 为 n 阶方阵，则 $R(A)\leqslant 1$ 的充要条件是存在两个 $n\times 1$ 矩阵 U,V，使 $A=UV'$.

25. 设 A 为 n 阶可逆方阵，A^* 为 A 的伴随阵，试证：

(1) $A^*=|A|A^{-1}$；

(2) $(A^*)^{-1}=\dfrac{1}{|A|}A=(A^{-1})^*$；

(3) $(-A)^*=(-1)^{n-1}A^*$；

(4) $|A^*|=|A|^{n-1}$.

26. 设 3 阶方阵 A 的行列式 $|A|=4$，求：

(1) $|A^*|$；　　(2) $|(-A)^*|$；

(3) $\left|\left[\dfrac{1}{4}A\right]^{-1}-\dfrac{1}{2}A^*\right|$；　　(4) $|(A^*)^{-1}|$.

27. 设 4 阶方阵 $A=(\alpha,X,Y,Z)$，$B=(\beta,X,Y,Z)$，$|A|=4$，$|B|=1$，求 $|A+B|$.

28. 设 A 为 n 阶方阵，n 是奇数，$A'A=E_n$，$|A|=1$. 试证 $|E_n-A|=0$.

29. 设 A 是 n 阶方阵，若对任意 $n\times 1$ 矩阵 B，$AX=B$ 都有解，则 A 是可逆阵，证明之.

30. 设 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n+1},\cdots,\alpha_{n+m})$ 是 $n+m$ 阶方阵，$|A|=a$，求

$$|\alpha_{n+1},\alpha_{n+2},\cdots,\alpha_{n+m},\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n|.$$

31. 设 A,B,C,D 都是 n 阶方阵，A 可逆，且 $AC=CA$，试证：

$$\begin{vmatrix}A & B\\ C & D\end{vmatrix}=|AD-CB|.$$

32. 设 A,B 都是 $m\times n$ 矩阵，证明：A 经初等变换可以化成 B 的充要条件是 $R(A)=R(B)$.

33. 设 A 是 n 阶非奇异矩阵，B 是 $n\times 1$ 矩阵，b 是常数，记

$$Q=\begin{pmatrix} A & B \\ B' & b \end{pmatrix}.$$

试证 Q 可逆的充要条件是 $B'A^{-1}B\neq b$.

34. 设 A 是 n 阶方阵，A^* 是 A 的伴随阵，试证：

$$R(A^*)=\begin{cases} n, \text{当 } R(A)=n \text{ 时}, \\ 1, \text{当 } R(A)=n-1 \text{ 时}, \\ 0, \text{当 } R(A)<n-1 \text{ 时}. \end{cases}$$

35. 设 $A=(a_{ij})$ 是 $n\times n$ 矩阵，称

$$\operatorname{tr}A=\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

为 A 的迹. 设 A,B 都是 $n\times n$ 矩阵，证明：

(1) $\operatorname{tr}(A+B)=\operatorname{tr}A+\operatorname{tr}B$；

(2) $\operatorname{tr}(kA)=k\operatorname{tr}(A)$；

(3) $\operatorname{tr}(AB)=\operatorname{tr}(BA)$；

(4) $AB-BA\neq E_n$；

(5) 若 A 还是可逆阵，则 $\operatorname{tr}(ABA^{-1})=\operatorname{tr}B$.

第三章　几何向量

空间解析几何是用代数方法研究几何空间中几何问题的一个数学分支．在空间解析几何中，几何向量是一个有力的研究工具．本章主要讨论如下几个问题：

1. 几何向量的线性运算及线性相关性．
2. 几何向量的数量积、向量积和混合积．
3. 空间中的直线与平面．

3.1　几何向量及其线性运算

3.1.1　几何向量的概念

描述速度、加速度、力等既有方向又有大小的量，称为**向量**或**矢量**．向量有两个特征——大小和方向，几何中的有向线段恰好具有这两个特征．抛去一般向量的具体意义，我们用几何空间中有向线段表示向量，并称这样的向量为**几何向量**（有时简称向量）．有向线段的长度表示向量的大小，有向线段的方向表示向量的方向．以 A 为起点，B 为终点的有向线段所表示的向量记为$\overrightarrow{AB}$（图 3.1）．有时也用一个黑体字母表示向量，如 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{n}$ 等．向量的大小叫向量的**长度**（也叫向量的模）．向量$\overrightarrow{AB}$，$\boldsymbol{a}$ 的长度依次记为 $|\overrightarrow{AB}|$ 和 $|\boldsymbol{a}|$．长度为 1 的向量称为单位向量．起点和终点重合的向量称为零向量，记为 $\boldsymbol{0}$．零向量的长度等于 0，零向量的方向可以看作是任意的．



图 3.1

在实际问题中，有些向量与其起点有关，有些向量与其起点无关．本书只研究与起点无关的向量，并称这种向量为**自由向量**．这样的向量可以平行移动，所以如果两个向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的长度相等，又互相平行（即在同一条直线上，或在平行直线上），且指向相同，则说 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ **相等**，记为 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$，也就是说，平行移动后能完全重合的向量是相等的．因为本书讨论的是自由向量，故可以说任两向量共面．

3.1.2　几何向量的线性运算

向量的线性运算是指向量的加法和数与向量相乘．

设 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OA}$，$\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OB}$，规定 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 是一个向量，它是以$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$为邻边作平行四边形 $OACB$ 后，再由点 O 与其相对的顶点 C 连成的向量，即 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OC}$（图 3.2）．这种方法叫**平行四边形法**．如果两向量 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OA}$与 $\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OB}$在同一直线上，那么规定它们的和是这样一个向量：当$\overrightarrow{OA}$与$\overrightarrow{OB}$的指向相同时，和向量的方向与原来两向量的方向相同，其长度等于两向量长度的和；当$\overrightarrow{OA}$与$\overrightarrow{OB}$的指向相反时，和向量的方向与较长的向量的方向相

同，而长度等于两向量长度的差．

在图 3.2 中，$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，所以，让 $\boldsymbol{a}$ 的终点与 $\boldsymbol{b}$ 的起点重合，则由 $\boldsymbol{a}$ 的起点 O 到 $\boldsymbol{b}$ 的终点 C 的向量$\overrightarrow{OC}$为 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的和向量，即$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，这种方法叫求向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 和的**三角形法**．

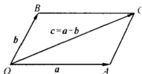


图 3.2

按定义，容易证明向量加法满足：

(1) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$（交换律）；

(2) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$（结合律）；

(3) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{a}$；

(4) $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}$.

由于向量加法满足结合律，多个向量相加，不必加括弧指明相加的次序．求多个向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ 之和时，只要让前一向量的终点作为次一向量的起点，则 $\boldsymbol{a}_1$ 的起点与 $\boldsymbol{a}_n$ 的终点相连并指向后者的向量等于 $\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_n$. $n=3$ 的例子如图 3.3 所示．与向量 $\boldsymbol{b}$ 的长度相等而方向与 $\boldsymbol{b}$ 的方向相反的向量称为 $\boldsymbol{b}$ 的**负向量**，记为 $-\boldsymbol{b}$. 向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $-\boldsymbol{b}$ 的和向量记为 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$，称为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**差**（见图 3.4）．

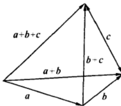


图 3.3

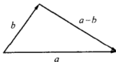


图 3.4

为了表示几何向量的“伸缩”，我们定义实数与向量的乘法（简称**数乘运算**）．

实数 k 与非零向量 $\boldsymbol{a}$ 的乘积是一个向量，记为 $k\boldsymbol{a}$. 它的长度 $|k\boldsymbol{a}|=|k||\boldsymbol{a}|$. 它的方向：当 $k>0$ 时，与 $\boldsymbol{a}$ 同向；当 $k<0$ 时，与 $\boldsymbol{a}$ 反向，如图 3.5，当 $k=0$ 时，方向不定（此时 $k\boldsymbol{a}$ 是零向量）．

若 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$，对任意实数 k，规定 $k\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$.

实数与向量的数乘满足：

(1) $1\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a},(-1)\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}$；

(2) $k(l\boldsymbol{a})=(kl)\boldsymbol{a}$；

(3) $k(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=k\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b}$；

(4) $(k+l)\boldsymbol{a}=k\boldsymbol{a}+l\boldsymbol{a}$.

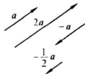


图 3.5

显然，只要 $\boldsymbol{a}$ 不是零向量，$\boldsymbol{a}/|\boldsymbol{a}|$ 就是与 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量，记作 $\boldsymbol{a}^{\circ}$，于是 $\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}^{\circ}$.

例 1 在平行四边形 $ABCD$ 内，设$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$. 试用 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 表示$\overrightarrow{MA}$，$\overrightarrow{MB}$，$\overrightarrow{MC}$和$\overrightarrow{MD}$，这里 M 是平行四边形对角线的交点（图 3.6）．

解 由 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=2\overrightarrow{AM}$，得

$$\overrightarrow{MA}=-\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}),$$

$$\overrightarrow{MC}=-\overrightarrow{MA}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}).$$

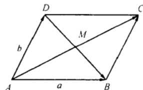


图 3.6

由 $-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=2\overrightarrow{MD}$，得

$$\overrightarrow{MD}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}),\quad \overrightarrow{MB}=-\overrightarrow{MD}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}).$$

3.2 几何向量的数量积、向量积和混合积

3.2.1 向量在轴上的投影

设有两个非零向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$，任取空间一点 O，作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，称不超过 π 的 $\angle AOB$（设 $\theta=\angle AOB$，$0\leqslant\theta\leqslant\pi$）为**向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角**（图 3.7），记作 $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$，零向量与另一向量的夹角可以在 0 到 π 间任意取值．可以类似地定义向量与一轴的夹角及两轴的夹角．

设有空间一点 A 及一轴 u，通过点 A 作轴 u 的垂直平面 π，那么称平面 π 与轴 u 的交点 A' 为**点 A 在轴 u 上的投影**（图 3.8）．

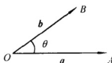


图 3.7

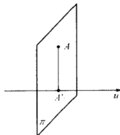


图 3.8

定义 3.1 设向量 $\overrightarrow{AB}$ 的起点 A 和终点 B 在轴 u 上的投影分别为 A' 和 B'（图 3.9），那么轴 u 上有向线段 $\overrightarrow{A'B'}$ 的值 $A'B'$（其绝对值等于 $|\overrightarrow{A'B'}|$，其符号由 $\overrightarrow{A'B'}$ 的方向决定，当 $\overrightarrow{A'B'}$ 与 u 轴同向时取正号；当 $\overrightarrow{A'B'}$ 与 u 轴反向时取负号）叫做**向量 $\overrightarrow{AB}$ 在轴 u 上的投影**，记作 $\mathrm{Prj}_u\overrightarrow{AB}$，轴 u 叫**投影轴**．

定理 3.1 向量 $\overrightarrow{AB}$ 在轴 u 上的投影等于向量的长度乘以轴与向量的夹角的余弦：

$$\mathrm{Prj}_u\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{AB}|\cos\theta.$$

证 如图 3.10，通过向量 $\overrightarrow{AB}$ 的起点 A 引轴 u'，使 u' 与轴 u 平行且具有相同的正方向，于是轴 u 与 $\overrightarrow{AB}$ 的夹角 θ 等于轴 u' 与 $\overrightarrow{AB}$ 的夹角，而且有

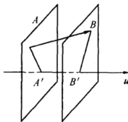


图 3.9

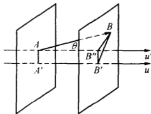


图 3.10

$$\mathrm{Prj}_u \overrightarrow{AB} = \mathrm{Prj}_{u'} \overrightarrow{AB}.$$

但

$$\mathrm{Prj}_{u'} \overrightarrow{AB} = AB'' = |\overrightarrow{AB}|\cos\theta,$$

所以

$$\mathrm{Prj}_u \overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AB}|\cos\theta. \qquad \square$$

由此可知：相等向量在同一轴上的投影相等．当一非零向量与其投影轴成锐角时，其投影为正；成钝角时，其投影为负；成直角时投影为零．

定理 3.2 两个向量的和在某轴上的投影等于这两向量在该轴上的投影的和，即

$$\mathrm{Prj}_u(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2) = \mathrm{Prj}_u \boldsymbol{a}_1 + \mathrm{Prj}_u \boldsymbol{a}_2.$$

证 设 u 为投影轴，作折线 ABC，使 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}_1$，$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}_2$，由向量加法的三角形法则可知，向量 $\overrightarrow{AC}$ 就是它们的和(图 3.11)，即

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2.$$

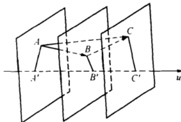


图 3.11

设 A,B,C 在轴 u 上的投影分别为 A',B',C'，那么

$$\mathrm{Prj}_u \overrightarrow{AB} = A'B',$$
$$\mathrm{Prj}u\ \overrightarrow{BC} = B'C',$$
$$\mathrm{Prj}u\ \overrightarrow{AC} = A'C'.$$

由于不论 A',B',C' 在轴 u 上的位置如何，总有

$$A'B' + B'C' = A'C',$$

所以

$$\mathrm{Prj}_u \overrightarrow{AB} + \mathrm{Prj}_u \overrightarrow{BC} = \mathrm{Prj}_u \overrightarrow{AC}.$$

即

$$\mathrm{Prj}_u \boldsymbol{a}_1 + \mathrm{Prj}_u \boldsymbol{a}_2 = \mathrm{Prj}_u(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2). \qquad \square$$

3.2.2 几何向量的数量积

先看一个例子．

设常力 $\boldsymbol{F}$ 作用在质点 m 上，使点 m 产生位移 $\boldsymbol{S}$，那么力 $\boldsymbol{F}$ 使质点 m 产生位移 $\boldsymbol{S}$ 所做的功为

$$W = |\boldsymbol{F}|\,|\boldsymbol{S}|\cos\theta.$$

其中 θ 为 $\boldsymbol{F}$ 与 $\boldsymbol{S}$ 的夹角．还有许多问题，都要对两个向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 作类似的运算．

定义 3.2 设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 是两个几何向量，称 $|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta(\theta=\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle)$ 为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**数量积或内积**，记作 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 或 $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$，即

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta.$$

根据数量积的定义，两个几何向量的数量积等于零的充要条件是 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$，或 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ 或 $\theta=\frac{\pi}{2}$. 我们规定零向量垂直于任何向量．这样，**两个几何向量互相垂直的充要条件是它们的数量积等于零**．

由于 $|\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$ 是向量 $\boldsymbol{b}$ 在向量 $\boldsymbol{a}$ 方向上的投影，所以，当 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$ 时，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 就是 $\boldsymbol{a}$ 的长度 $|\boldsymbol{a}|$ 与 $\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 的方向上的投影 $\mathrm{Prj}_{a}b$ 之积

$$a\cdot b=|a|\mathrm{Prj}_{a}b,$$

同样

$$a\cdot b=|b|\mathrm{Prj}_{b}\boldsymbol{a}.$$

向量的数量积具有下列性质：

(1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$（交换律）；

(2) $(k\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=k(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$；

(3) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$（分配律）；

(4) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}\geqslant 0$. 此外，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=0$ 的充要条件是 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$.

把(3)推广，可得

$$(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_m)\cdot(\boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{b}_2+\cdots+\boldsymbol{b}_n)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\boldsymbol{a}_i\cdot\boldsymbol{b}_j.$$

由数量积的定义，可得几何向量长度 $|\boldsymbol{a}|$ 和夹角 $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$ 的公式：

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}},$$

$$\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}.$$

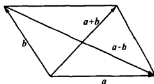


图 3.12

注意：向量的数量积不满足消去律，即在一般情况下，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c},\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}\nRightarrow\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$. 事实上，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$ 是说 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})=0$，即 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$ 垂直．同样 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}\nRightarrow\boldsymbol{a}=\boldsymbol{c}$.

例 2 用向量的数量积，证明恒等式：

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2+|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2=2|\boldsymbol{a}|^2+2|\boldsymbol{b}|^2$$

即，平行四边形对角线的平方和等于四边的平方和，如图 3.12.

证

$$\begin{aligned}&|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2+|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2\\&=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\\&=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}\\&=2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}\\&=2|\boldsymbol{a}|^2+2|\boldsymbol{b}|^2.\end{aligned}$$ □

3.2.3 几何向量的向量积

设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 是几何空间中三个几何向量，如果把 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 的起点放在一起，将右手的四指

(不含拇指)由 $\boldsymbol{a}$ 转到 $\boldsymbol{b}$(转过的角度 $\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$——小于 π 的角),那么伸开的拇指的指向就是 $\boldsymbol{c}$ 的方向,则称 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 构成"右手系". 如图 3.13.

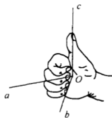


图 3.13

定义 3.2 设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 是两个向量,若向量 $\boldsymbol{c}$ 满足:

(1) $|\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta,\theta=\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$;

(2) $\boldsymbol{c}\perp \boldsymbol{a},\boldsymbol{c}\perp \boldsymbol{b}$;

(3) 向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 组成右手系,

则称向量 $\boldsymbol{c}$ 为向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 的**向量积**,记为 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$.

若 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 中有一个是零向量,规定 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$.

由向量积的定义可知:$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行.

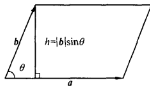


图 3.14

由于 $|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\sin\theta$ 等于平行四边形 $ABCD$ 的面积(图 3.14),所以,$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$ 的值与以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形的面积的值相同.

几何向量的向量积具有下列性质:

(1) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$;

(2) $(k\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=k(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\times(k\boldsymbol{b})$;

(3) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})+(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$;

$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})+(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})$.

注意: ①向量的向量积不满足交换律;

②向量的向量积不满足消去律,即在一般情况下,$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c},\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}\not\Rightarrow\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$. 同样,在一般情况下,$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}\not\Rightarrow\boldsymbol{a}=\boldsymbol{c}$.

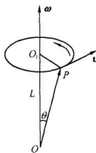


图 3.15

向量积有明显的物理意义. 设有一个圆锥形刚体以等角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 绕其中心轴 L 转动,$\boldsymbol{\omega}$ 的方向按"右手法则"规定为:用右手握住轴 L,四指指向旋转的方向,则伸开的拇指的指向就是 $\boldsymbol{\omega}$ 的方向(图 3.15). 此时,点 P 的线速度 $\boldsymbol{v}$ 的大小为

$$|\boldsymbol{v}|=|\boldsymbol{\omega}|\ |\overrightarrow{O_1P}|=|\boldsymbol{\omega}||\overrightarrow{OP}|\sin\theta=|\boldsymbol{\omega}\times\overrightarrow{OP}|,$$

$\boldsymbol{v}$ 的方向恰为 $\boldsymbol{\omega}\times\overrightarrow{OP}$ 的方向,所以

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{\omega}\times\overrightarrow{OP}.$$

3.2.4 几何向量的混合积

定义 3.4 已知三个向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{c}$. 先作 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的向量积 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$,把所得的向量与 $\boldsymbol{c}$ 再作数量积 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$,这样得到的数量叫做三向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 的**混合积**,记为 $[\boldsymbol{abc}]$.

由向量的混合积的定义可知:

$$[\boldsymbol{abc}]=0\Leftrightarrow\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\text{ 共面}.$$

向量的混合积有如下几何意义:$[\boldsymbol{abc}]=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$ 的绝对值表示以向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 为棱的平行六面体的体积. 如果向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 组成右手系,那么混合积的符号是正的;如果 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$,

c 组成左手系，那么混合积的符号是负的．

事实上，设$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$，按向量积的定义$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$等于以 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 为边所作平行四边形 $OADB$ 的面积，$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 的方向垂直于这个平行四边形所在的平面 π，且当 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 组成右手系时，向量 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 指向平面 π 的同侧(图 3.16)；当 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 组成左手系时，向量 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 指向平面 π 的异侧．如果设 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 的夹角为 α，则

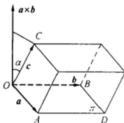


图 3.16

$$[\boldsymbol{abc}]=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|\,|\boldsymbol{c}|\cos\alpha.$$

从而当 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 组成右手系时，$[\boldsymbol{abc}]$为正；当 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 组成左手系时，$[\boldsymbol{abc}]$为负．由于以向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 为棱的平行六面体的底(平行四边形 $OADB$)的面积等于$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$，它的高 h 等于$\pm|\boldsymbol{c}|\cos\alpha$(当 α 为锐角时取正号，当 α 为钝角时取负号)，所以这个平行六面体的体积为

$$V=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|\cdot|\boldsymbol{c}|\cos\alpha\text{，或者 }V=-|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|\cdot|\boldsymbol{c}|\cos\alpha.$$

即

$$[abc]=V\text{，或者}[\boldsymbol{abc}]=-V.$$

向量的混合积满足：

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}=(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=-(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{c}=-(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}=-(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{b},$$

即

$$[\boldsymbol{abc}]=[\boldsymbol{bca}]=[\boldsymbol{cab}]=-[\boldsymbol{bac}]=-[\boldsymbol{cba}]=-[\boldsymbol{acb}].$$

3.2.5 几何向量的坐标

为了将几何向量的加法、数乘、数量积、向量积及混合积的计算转化为数的代数运算，我们先引入空间直角坐标系的概念，并给出几何向量的坐标表示式(代数表示式)．

过空间一个定点 O，作三条相互垂直的数轴，它们都以 O 为原点且一般具有相同的长度单位．这三条轴分别叫 x **轴**(横轴)、y **轴**(纵轴)、z **轴**(竖轴)；统称**坐标轴**．通常把 x 轴和 y 轴配置在水平面上，而 z 轴则是铅垂线；它们的正方向通常构成“右手系”，即 Ox，Oy 和 Oz 的正方向符合“右手规则”．这样的三条坐标轴就构成了一个**空间直角坐标系**，记为 $Oxyz$．点 O 叫做**坐标原点**(或**原点**)．

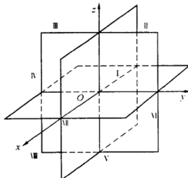


图 3.17

三条坐标轴中的任意两条可以确定一个平面．这样定出的三个平面统称为**坐标面**．x 轴及 y 轴所确定的坐标面叫 xOy **面**．同样，另两个坐标面分别叫做 yOz **面**及 zOx **面**．三个坐标面把空间分成八个部分，每一部分叫做一个**卦限**．含有 x 轴、y 轴及 z 轴的正半轴的那个卦限叫做**第一卦限**，其它为第二、第三、第四卦限，在 xOy 轴的上方，按逆时针方向确定．第五卦限在第一卦限的下方，其它第六、七、八卦限在 xOy 面的下方，按逆时针方向确定

(图 3.17).

设 M 是空间中任一点，P,Q,R 分别是点 M 在 x,y,z 轴上的投影．记 P,Q,R 在 x,y,z 轴上的坐标依次为 x,y,z，则点 M 唯一地确定了一个三元有序实数组 (x,y,z). 反之，任给一个三元有序数组 (x,y,z)，按同样的含义，也唯一地确定了 $Oxyz$ 坐标系中一个点．称这组数 x,y,z 为**点 M 的坐标**，并依次称 x,y 和 z 为点 M 的**横坐标**、**纵坐标**和**竖坐标**．坐标为 x,y,z 的点 M 通常记为 $M(x,y,z)$.

在空间直角坐标系 $Oxyz$ 的三条轴 Ox,Oy,Oz 的正方向依次取三个单位向量 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$，称其为**基本单位向量**．

由基本单位向量的定义可知：

$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}=1,$$

$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}=0,$$

$$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k},\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{i},\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j},$$

$$\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i}=-\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j}=-\boldsymbol{i},\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k}=-\boldsymbol{j},$$

$$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{0}.$$

下面指出，空间中任一向量 $\boldsymbol{a}$ 都可唯一地表成

$$a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$$

的形式，其中 $a_x,a_y,a_z\in R$.

取点 M 使 $\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{a}$，记点 M 的坐标为 x,y,z（图 3.18），按几何向量的加法和数乘的法则有

$$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OM'}+\overrightarrow{M'M}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k},$$

即 $\quad \boldsymbol{a}=(\mathrm{Prj}_x\boldsymbol{a})\boldsymbol{i}+(\mathrm{Prj}_y\boldsymbol{a})\boldsymbol{j}+(\mathrm{Prj}_z\boldsymbol{a})\boldsymbol{k}.$

若还有

$$\boldsymbol{a}=x'\boldsymbol{i}+y'\boldsymbol{j}+z'\boldsymbol{k},$$

则 $\quad \boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}=(x-x')\boldsymbol{i}+(y-y')\boldsymbol{j}+(z-z')\boldsymbol{k}=\boldsymbol{0}.$

从而 $\quad ((x-x')\boldsymbol{i}+(y-y')\boldsymbol{j}+(z-z')\boldsymbol{k})\cdot\boldsymbol{i}=\boldsymbol{0},$

于是 $\quad (x-x')\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}+(y-y')\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i}+(z-z')\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}=0,$

故 $\quad x-x'=0,$

即 $\quad x=x'.$

同理 $\quad y=y',z=z'.$

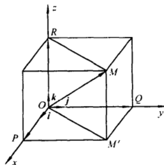


图 3.18

定义 3.5 设 $\boldsymbol{a}$ 是一个几何向量，若

$$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}.$$

则称 (a_x,a_y,a_z) 为向量 $\boldsymbol{a}$ 关于基本单位向量 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 的**坐标**，简称坐标（为了区分点的坐标与向量的坐标，有时将向量坐标记为 $\{a_x,a_y,a_z\}$）.

由向量坐标的定义可知，$a_x=\mathrm{Prj}_x\boldsymbol{a},\quad a_y=\mathrm{Prj}_y a,\quad a_z=\mathrm{Prj}_z\boldsymbol{a}$.

例 3 设 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{M_1M_2}$，$M_1,M_2$ 的坐标分别为 (x_1,y_1,z_1) 和 (x_2,y_2,z_2)（图 3.19），求向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标．

解 根据几何向量的运算规则得

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{a} &= \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1} \\
&= (x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k}) - (x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k}) \\
&= (x_2-x_1)\boldsymbol{i}+(y_2-y_1)\boldsymbol{j}+(z_2-z_1)\boldsymbol{k}.
\end{aligned}
$$

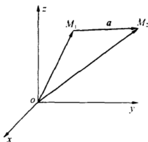


图 3.19

故 $\boldsymbol{a}$ 的坐标为 $(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1)$.

利用几何向量的坐标，把向量 $\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$ 记作 (a_x,a_y,a_z)，即 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$. 进而可得向量的加法、减法、数与向量相乘、向量的数量积、向量的向量积、向量的混合积等运算的坐标形式.

设

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{a} &= a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}=(a_x,a_y,a_z), \\
\boldsymbol{b} &= b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}=(b_x,b_y,b_z), \\
\boldsymbol{c} &= c_x\boldsymbol{i}+c_y\boldsymbol{j}+c_z\boldsymbol{k}=(c_x,c_y,c_z),
\end{aligned}
$$

则

(1) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(a_x+b_x, a_y+b_y, a_z+b_z)$;

(2) $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(a_x-b_x, a_y-b_y, a_z-b_z)$;

(3) $k\boldsymbol{a}=(ka_x, ka_y, ka_z)$;

(4) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$;

(5) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\left[\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}\right]=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$;

其中，$\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}\boldsymbol{i}-\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}\boldsymbol{j}+\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}\boldsymbol{k}$.

(6) $[\boldsymbol{abc}]=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$.

(1),(2),(3)的证明留给读者作为练习，我们证明(4),(5),(6).

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} &= (a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})\cdot(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}) \\
&= a_xb_x\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}+a_yb_y\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}+a_zb_z\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}+(a_xb_y+a_yb_x)\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}+ \\
&\quad (a_xb_z+a_zb_x)\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k}+(a_yb_z+a_zb_y)\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k} \\
&= a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z.
\end{aligned}
$$

由 $\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i}=-\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j}=-\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k}=-\boldsymbol{j}$ 得

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} &= (a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})\times(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}) \\
&= a_xb_x\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}+a_yb_y\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}+a_zb_z\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}+a_xb_y\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}+a_xb_z\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k} \\
&\quad +a_yb_x\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i}+a_yb_z\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}+a_zb_x\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}+a_zb_y\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j} \\
&= (a_yb_z-a_zb_y)\boldsymbol{i}-(a_xb_z-a_zb_x)\boldsymbol{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\boldsymbol{k}
\end{aligned}
$$

$$=\left[\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix},-\begin{vmatrix}a_x & a_z\\ b_x & b_z\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}\right]=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}.$$

$$[\boldsymbol{abc}]=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=((a_yb_z-a_zb_y)\boldsymbol{i}-(a_xb_z-a_zb_x)\boldsymbol{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\boldsymbol{k})\cdot(c_x\boldsymbol{i}+c_y\boldsymbol{j}+c_z\boldsymbol{k})$$

$$=(a_yb_z-a_zb_y)c_x-(a_xb_z-a_zb_x)c_y+(a_xb_y-a_yb_x)c_z$$

$$=\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}.$$

由向量的数量积的定义及上述(4)式，对于向量 $a=(a_x,a_y,a_z)$，易得

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}.$$

若记 $\boldsymbol{a}$ 与 Ox,Oy,Oz 轴之间的夹角依次为 α,β,γ 则

$$\cos\alpha=\frac{a_x}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}},\quad \cos\beta=\frac{a_y}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}},\quad \cos\gamma=\frac{a_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}.$$

称 α,β,γ 为 $\boldsymbol{a}$ 的**方向角**，称 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 为 $\boldsymbol{a}$ 的**方向余弦**. 显然

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1,$$

$$\boldsymbol{a}^{\circ}=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\left[\frac{a_x}{|\boldsymbol{a}|},\frac{a_y}{|\boldsymbol{a}|},\frac{a_z}{|\boldsymbol{a}|}\right]=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma).$$

例 4 已知三点 $M(1,1,1)$，$A(2,2,1)$ 和 $B(2,1,2)$，求 $\angle AMB$ 及 $\triangle AMB$ 的面积.

解 作向量 $\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}$，$\angle AMB$ 就是向量 $\overrightarrow{MA}$ 与 $\overrightarrow{MB}$ 的夹角，$\overrightarrow{MA}=(1,1,0)$，$\overrightarrow{MB}=(1,0,1)$. 从而

$$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=1\times1+1\times0+0\times1=1;$$

$$|\overrightarrow{MA}|=\sqrt{1+1+0}=\sqrt{2};$$

$$|\overrightarrow{MB}|=\sqrt{1+0+1}=\sqrt{2};$$

$$\cos(\angle AMB)=\frac{\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}}{|\overrightarrow{MA}|\ |\overrightarrow{MB}|}=\frac{1}{2}.$$

由此得 $\angle AMB=\frac{\pi}{3}$.

$\triangle AMB$ 的面积 $S_{\triangle AMB}$ 等于 $\overrightarrow{MA}$ 与 $\overrightarrow{MB}$ 的向量积的长度的一半，而

$$\overrightarrow{MA}\times\overrightarrow{MB}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{vmatrix}=\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k},$$

$$S_{\triangle AMB}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{MA}\times\overrightarrow{MB}|=\frac{1}{2}\sqrt{1+1+1}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

例 5 已知空间中四点：$A(1,1,1)$，$B(4,4,4)$，$C(3,5,5)$，$D(2,4,7)$，求四面体 $ABCD$ 的体积.

解 四面体 $ABCD$ 的体积 V_{ABCD} 等于以向量 $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}$ 为棱作的平行六面体体积

的$\frac{1}{6}$，而该平行六面体的体积等于混合积$[\overrightarrow{AB}\ \ \overrightarrow{AC}\ \ \overrightarrow{AD}]$的绝对值．

$$\overrightarrow{AB}=(3,3,3),\quad \overrightarrow{AC}=(2,4,4)\quad \overrightarrow{AD}=(1,3,6),$$

$$[\overrightarrow{AB}\ \ \overrightarrow{AC}\ \ \overrightarrow{AD}]=\begin{vmatrix}3&3&3\\2&4&4\\1&3&6\end{vmatrix}=18,$$

$$V_{ABCD}=\frac{1}{6}|[\overrightarrow{AB}\ \ \overrightarrow{AC}\ \ \overrightarrow{AD}]|=\frac{1}{6}\times 18=3.$$

3.3 空间中的平面与直线

取定三维几何空间中的一个坐标系（一般取直角坐标系），任给一个平面π（直线L），所谓平面π（直线L）的方程，就是平面π（直线L）上任意点$M(x,y,z)$的坐标(x,y,z)所满足的一个方程$F(x,y,z)=0$，并且满足这个方程$F(x,y,z)=0$的点$M(x,y,z)$一定在平面π（直线L）上．本节在空间直角坐标系中建立平面与直线的方程，讨论空间中点、直线、平面之间的一些关系．

3.3.1 空间中平面的方程

设平面π通过点$M_0(x_0,y_0,z_0)$并且垂直于非零向量$\boldsymbol{n}=(A,B,C)$，如图(3.20)．下面建立平面π的方程．

称垂直于平面π的非零向量$\boldsymbol{n}=(A,B,C)$为平面π的**法向量**．

设$M(x,y,z)$是平面π上的任意一点，则$\overrightarrow{M_0M}$与$\boldsymbol{n}$垂直，从而

$$\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{M_0M}=0,$$

由$\overrightarrow{M_0M}=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OM_0}=(x-x_0,y-y_0,z-z_0)$，$\boldsymbol{n}=(A,B,C)$知

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0. \tag{1}$$

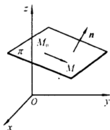


图 3.20

即平面π上任一点$M(x,y,z)$的坐标满足式(1)．反之，若点$M(x,y,z)$的坐标满足式(1)，则$\overrightarrow{M_0M}$与$\boldsymbol{n}$垂直，故点M必在平面π上．从而式(1)就是平面π的方程，称其为平面π的**点法式方程**．

将式(1)整理得

$$Ax+By+Cz+D=0. \tag{2}$$

其中$D=-(Ax_0+By_0+Cz_0)$，称方程(2)为平面π的**一般方程**．

由于任一平面都可用它上面的一点及它的法向量来确定，所以由上面的讨论可知，任一平面π的方程都可以写成形如式(2)的三元一次方程的形式．反过来，当A,B,C中至少有一个不为零时，形如式(2)的每一个三元一次方程都确定一个法向量为$\boldsymbol{n}=(A,B,C)$的平面．事实上，任取满足式(2)的一组数x_0,y_0,z_0，则

$$Ax_0+By_0+Cz_0+D=0. \tag{3}$$

由式(2)及式(3)得

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0. \tag{4}$$

这是通过点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$，垂直于 $\boldsymbol{n}=(A,B,C)$ 的平面方程．又式(2)与式(4)同解，故当 A,B,C 不全为零时，任意一个形如式(2)的三元一次方程都是平面方程．

例 6 已知平面 π 过点 $M_0(2,1,0)$，且平面 π 平行于向量 $\boldsymbol{a}=(1,0,1)$ 和 $\boldsymbol{b}=(0,1,0)$，试求平面 π 的方程．

解 由于平面 π 平行于向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$，所以 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 与平面 π 垂直，可以作为 π 的法向量．由

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{vmatrix}=-\boldsymbol{i}+\boldsymbol{k}=(-1,0,1),$$

平面 π 通过 $M_0(2,1,0)$，知平面 π 的方程为

$$-1(x-2)+0(y-1)+(z-0)=0,$$

即

$$x-z-2=0.$$

例 7 设 $M_1(x_1,y_1,z_1),M_2(x_2,y_2,z_2),M_3(x_3,y_3,z_3)$ 是空间中不在同一条直线上的三点，试求过三点 M_1,M_2,M_3 的平面 π 的方程．

解 由 M_1,M_2,M_3 在平面 π 上，所以 $\overrightarrow{M_1M_2},\overrightarrow{M_1M_3}$ 都平行于平面 π. 由 M_1,M_2,M_3 不共线，所以 $\overrightarrow{M_1M_2},\overrightarrow{M_1M_3}$ 不共线，故 $\overrightarrow{M_1M_2}\times\overrightarrow{M_1M_3}$ 是平面 π 的法向量．

$$\overrightarrow{M_1M_2}=\overrightarrow{OM_2}-\overrightarrow{OM_1}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1),$$

$$\overrightarrow{M_1M_3}=\overrightarrow{OM_3}-\overrightarrow{OM_1}=(x_3-x_1,y_3-y_1,z_3-z_1),$$

$$\overrightarrow{M_1M_2}\times\overrightarrow{M_1M_3}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1\end{vmatrix}$$

$$=\left[\begin{vmatrix}y_2-y_1 & z_2-z_1\\ y_3-y_1 & z_3-z_1\end{vmatrix},-\begin{vmatrix}x_2-x_1 & z_2-z_1\\ x_3-x_1 & z_3-z_1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}x_2-x_1 & y_2-y_1\\ x_3-x_1 & y_3-y_1\end{vmatrix}\right].$$

又点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 在平面 π 上，所以平面 π 的方程为

$$\begin{vmatrix}y_2-y_1 & z_2-z_1\\ y_3-y_1 & z_3-z_1\end{vmatrix}(x-x_1)-\begin{vmatrix}x_2-x_1 & z_2-z_1\\ x_3-x_1 & z_3-z_1\end{vmatrix}(y-y_1)+\begin{vmatrix}x_2-x_1 & y_2-y_1\\ x_3-x_1 & y_3-y_1\end{vmatrix}(z-z_1)=0.$$

即

$$\begin{vmatrix}x-x_1 & y-y_1 & z-z_1\\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1\end{vmatrix}=0. \tag{5}$$

称方程(5)为平面 π 的**三点式方程**．

例 8 设一平面 π 与 x,y,z 轴分别交于 $P(a,0,0),Q(0,b,0)$ 和 $R(0,0,c)$(图 3.21)，求平面 π 的方程(其中 a,b,c 都不为零)．

解 由 P,Q,R 三点不共线，可知平面 π 的方程为

$$\begin{vmatrix} x-a & y-0 & z-0 \\ 0-a & b-0 & 0-0 \\ 0-a & 0-0 & c-0 \end{vmatrix}=0,$$

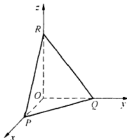


图 3.21

即

$$bcx+acy+abz=abc.$$

由 a,b,c 都不是零，得

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1. \tag{6}$$

称方程(6)为平面 π 的**截距式方程**.

例 9 设平面 π 过点 $M_0(2,3,4)$ 及 z 轴，求平面 π 的方程.

解法 1 (待定系数法)设平面 π 的方程是

$$Ax+By+Cz+D=0.$$

因平面 π 通过 z 轴，故点 $(0,0,0)$ 及 $(0,0,1)$ 在平面 π 上，于是 $C=D=0$. 又 $M_0(2,3,4)$ 在平面 π 上，故 $2A+3B=0, A=-\frac{3}{2}B$. 从而平面 π 的方程为

$$-\frac{3}{2}Bx+By=0,$$

即

$$3x-2y=0.$$

解法 2 易得平面 π 上三点 $O(0,0,0), P(0,0,1), M_0(2,3,4)$，由平面的三点式方程知平面 π 的方程为

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}=0,$$

即

$$3x-2y=0.$$

解法 3 由于 $\overrightarrow{OM_0}$ 及 z 轴都平行于平面 π，所以可以取平面 π 的法向量为

$$\boldsymbol{n}=\overrightarrow{OM_0}\times\boldsymbol{k}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=(3,-2,0),$$

由平面的点法式方程得平面 π 的方程为(平面 π 过原点)

$$3x-2y=0.$$

3.3.2 空间中直线的方程

如果非零向量 $\boldsymbol{s}$ 平行于一条已知直线 L，则称 $\boldsymbol{s}$ 是直线 L 的**方向向量**.

我们来建立过已知点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$，并且平行于已知非零向量 $\boldsymbol{s}=(m,n,p)$ 的直线 L 的方程.

设点 $M(x,y,z)$ 是直线上的任意一点. 那么，向量 $\overrightarrow{M_0M}=(x-x_0,y-y_0,z-z_0)$ 与向量 $\boldsymbol{s}$ 平行(图 3.22). 于是存在数 t 使

$$\overrightarrow{M_0M}=t\boldsymbol{s}.$$

于是

$$\begin{cases} x=x_0+mt \\ y=y_0+nt \quad (t\text{ 为参数}), \\ z=z_0+pt \end{cases} \tag{7}$$

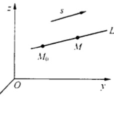


图 3.22

消去 t 得

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}. \tag{8}$$

易证,点 $M(x,y,z)$ 在直线 L 上的充要条件是其坐标 x, y, z 满足方程(8),故方程(8)是直线 L 的方程. 称方程(8)为直线 L 的**标准方程**,称方程(7)为直线 L 的**参数方程**.

注:当方程(8)中 m,n,p 中有一个为零,例如 $m=0$,而 $n,p\neq 0$ 时,方程(8)应理解为

$$\begin{cases} x-x_0=0 \\ \dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}; \end{cases}$$

当 m,n,p 中有两个为零,例如 $m=n=0$,而 $p\neq 0$ 时,方程(8)应理解为

$$\begin{cases} x-x_0=0 \\ y-y_0=0. \end{cases}$$

例如,方程 $\frac{x-4}{5}=\frac{y+6}{0}=\frac{z}{7}$ 表示的是一条过点 $M_0(4,-6,0)$ 且平行于向量 $\boldsymbol{s}=(5,0,7)$ 的直线 L. L 的方程还可写成

$$\begin{cases} y+6=0 \\ \dfrac{x-4}{5}=\dfrac{z}{7}. \end{cases}$$

设平面 π_1,π_2 为

$$\pi_1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,$$
$$\pi_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0.$$

π_1,π_2 相交于一条直线 L(图 3.23),则直线 L 的方程为

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0. \end{cases} \tag{9}$$

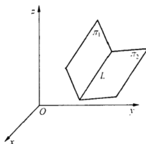


图 3.23

事实上,L 上任一点 $M(x,y,z)$ 既在 π_1 上又在 π_2 上,故 $M(x,y,z)$ 的坐标满足方程(9). 反之,若 $M(x,y,z)$ 的坐标满足方程(9),则 $M(x,y,z)$ 既在 π_1 上又在 π_2 上,从而必在直线 L 上. 称方程(9)为直线 L 的**一般方程**.

给定一条直线 L,通过直线 L 的平面有无限多个,在这无限多个平面中任选两个(不重合)平面,把它们的方程联立起来,所得的方程就是 L 的一般方程.

例 10 试求过已知两点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 与 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 的直线 L 的方程.

解 由于 M_0,M_1 在 L 上,所以 $\overrightarrow{M_0M_1}=(x_1-x_0,y_1-y_0,z_1-z_0)$ 是 L 的方向向量. 又 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 在 L 上,故 L 的方程为

$$\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{y-y_0}{y_1-y_0}=\frac{z-z_0}{z_1-z_0}. \tag{10}$$

称方程(10)为直线 L 的二点式方程.

例如,过点 $M_0(1,2,-1)$ 和 $M_1(-1,2,4)$ 的直线方程为

$$\frac{x-1}{-1-1}=\frac{y-2}{2-2}=\frac{z+1}{4+1}.$$

即

$$\begin{cases} y-2=0 \\ 5x+2z-3=0. \end{cases}$$

例 11 设直线 L 的一般方程为

$$\begin{cases} x+3y+2z=0 \\ x+4y+2z=0, \end{cases}$$

试求 L 的标准方程和参数方程.

解 设

$$\pi_1: x+3y+2z=0$$

$$\pi_2: x+4y+2z=0.$$

π_1,π_2 的法向量分别为 $\boldsymbol{n}_1=(1,3,2),\boldsymbol{n}_2=(1,4,2)$. 它们的向量积是 L 的方向向量.

$$\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix}=(-2,0,1),$$

又 $M_0(0,0,0)$ 在直线 L 上,故直线 L 的标准方程为

$$\frac{x}{-2}=\frac{y}{0}=\frac{z}{1}.$$

令

$$\frac{x}{-2}=\frac{y}{0}=\frac{z}{1}=t,$$

得直线 L 的参数方程

$$\begin{cases} x=-2t \\ y=0 \\ z=t. \end{cases}$$

3.3.3 距离

先来考查点到平面的距离.

设 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 是平面 $\pi: Ax+By+Cz+D=0$ 外一点.在平面 π 上任取一点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$,作平面 π 的法向量 $\boldsymbol{n}=(A,B,C)$,则点 M_0 到平面 π 的距离 d(图 3.24)为

$$d=|\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{n}}\overrightarrow{M_1M_0}|.$$

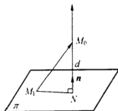


图 3.24

设 $\boldsymbol{n}^{\circ}$ 是与 $\boldsymbol{n}$ 方向一致的单位向量,则

$$\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{n}}\overrightarrow{M_1M_0}=\boldsymbol{n}^{\circ}\cdot\overrightarrow{M_1M_0}.$$

但

$$n^{\circ}=\frac{n}{|n|}=\left[\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right],$$

$$\overrightarrow{M_1M_0}=(x_0-x_1,y_0-y_1,z_0-z_1).$$

于是由 $M_1(x_1,y_1,z_1)$在平面 π 上，$Ax_1+By_1+Cz_1+D=0$ 得

$$\begin{aligned}d&=|\mathrm{Prj}_{n}\overrightarrow{M_1M_0}|=|n^{\circ}\cdot\overrightarrow{M_1M_0}|\\&=\left|\frac{A(x_0-x_1)}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}+\frac{B(y_0-y_1)}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}+\frac{C(z_0-z_1)}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right|\\&=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0-(Ax_1+By_1+Cz_1)|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\\&=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.\end{aligned}$$

例如，点 $M_0(1,1,1)$到平面 $\pi:2x+2y-z+10=0$ 的距离为

$$d=\frac{|2\times1+2\times1-1\times1+10|}{\sqrt{2^2+2^2+(-1)^2}}=\frac{13}{3}.$$

例 12 求两个平行平面

$$\pi_1:3x+4y+5z+10=0,$$
$$\pi_2:3x+4y+5z+20=0,$$

之间的距离.

解 在 π_1 上取定一点 $P(0,0,-2)$，那么点 P 到 π_2 的距离就是平行平面 π_1,π_2 之间的距离

$$d=\frac{|3\times0+4\times0+5\times(-2)+20|}{\sqrt{3^2+4^2+5^2}}=\frac{\sqrt{50}}{5}.$$

再来看点到直线的距离.

设直线 L 的标准方程为

$$L:\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p},$$

即 L 过点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$，并且方向向量为 $s=(m,n,p)$. 再设 $M_1(x_1,y_1,z_1)$是直线 L 外一点，则点 M_1 到直线 L 的距离 d(图 3.25)为

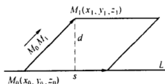


图 3.25

$$d=\frac{|s\times\overrightarrow{M_0M_1}|}{|s|}.\tag{11}$$

事实上，以 $s,\overrightarrow{M_0M_1}$为邻边的平行四边形的面积 $S_{\square}$为

$$S_{\square}=|s\times\overrightarrow{M_0M_1}|.$$

又 $S_{\square}=d\times|s|$，故公式(11)成立．

例 13 求点 $M_1(1,0,2)$到直线 $L:\frac{x+1}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z}{1}$的距离．

解 $s=(2,1,1)$，M_0 的坐标为$(-1,-1,0)$．

$$\overrightarrow{M_0M_1}=(1-(-1),0-(-1),2-0)=(2,1,2),$$

$$s\times\overrightarrow{M_0M_1}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}=(1,-2,0),$$

$$|s\times\overrightarrow{M_0M_1}|=\sqrt{1^2+(-2)^2+0^2}=\sqrt{5},$$

$$|s|=\sqrt{2^2+1^2+1^2}=\sqrt{6}.$$

故

$$d=\frac{|s\times\overrightarrow{M_0M_1}|}{|s|}=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{30}}{6}.$$

最后研究两条异面直线间的距离．

设有两条异面直线：

$$L_1:\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1},$$

$$L_2:\frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}.$$

记 $P_1(x_1,y_1,z_1)$，$P_2(x_2,y_2,z_2)$是 L_1，L_2 上两点．L_1，L_2 的方向向量 $s_1=(m_1,n_1,p_1)$，$s_2=(m_2,n_2,p_2)$分别与 L_1，L_2 的公垂线垂直，所以 L_1，L_2 的公垂线的方向向量为 $s_1\times s_2$，如图 3.26 所示．

$\overrightarrow{P_1P_2}$在 $s_1\times s_2$ 上的投影的绝对值就是 L_1 与 L_2 之间的距离 d，即

$$d=\left|\text{Prj}_{s_1\times s_2}\overrightarrow{P_1P_2}\right|=\left|\overrightarrow{P_1P_2}\cdot\frac{s_1\times s_2}{|s_1\times s_2|}\right|.$$

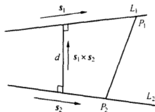


图 3.26

例 14 求两异面直线

$$L_1:\ \frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{3},$$

$$L_2:\ x-2=y=z-3,$$

之间的距离．

解 $P_1(0,0,0)$在 L_1 上，$P_2(2,0,3)$在 L_2 上，$\overrightarrow{P_1P_2}=(2,0,3)$．$L_1$，$L_2$ 的方向向量分别为 $s_1=(1,2,3)$，$s_2=(1,1,1)$．于是

$$s_1\times s_2=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=(-1,2,-1).$$

L_1 与 L_2 间的距离为

$$d=\left|\overrightarrow{P_1P_2}\cdot\frac{s_1\times s_2}{|s_1\times s_2|}\right|=\frac{|2\times(-1)+0\times2+3\times(-1)|}{\sqrt{(-1)^2+2^2+(-1)^2}}=\frac{5\sqrt{6}}{6}.$$

3.3.4 位置关系

先讨论平面与平面间的位置关系.

设有两个平面

$$\pi_1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,$$
$$\pi_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0.$$

称 π_1,π_2 的法向量的夹角 φ 为这两个平面的夹角,通常规定 $0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}$,平面 π_1 与 π_2 的夹角 φ 可由公式

$$\cos\varphi=\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$$

来确定(图 3.27).

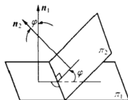


图 3.27

π_1 与 π_2 垂直的充要条件是其法向量 $\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2$ 互相垂直,即

$$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0.$$

π_1 与 π_2 平行的充要条件是其法向量 $\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2$ 互相平行,即

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}.$$

π_1 与 π_2 重合的充要条件是

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}=\frac{D_1}{D_2}.$$

例 15 求平面

$$\pi_1: x+2y-z+8=0$$

与

$$\pi_2: 2x+y+z-7=0$$

之间的夹角.

解

$$\cos\varphi=\frac{|1\times2+2\times1+(-1)\times1|}{\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{2^2+1^2+1^2}}=\frac{1}{2}.$$

故所求夹角 $\varphi=\frac{\pi}{3}$.

下面讨论两条直线间的位置关系.

设有两条直线

$$L_1: \frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1},$$

$$L_2: \frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}.$$

称 L_1,L_2 的方向向量 $\boldsymbol{s}_1=(m_1,n_1,p_1)$,$\boldsymbol{s}_2=(m_2,n_2,p_2)$ 的夹角 φ 为两直线 L_1 与 L_2 的

夹角，通常规定：$0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}$.

L_1,L_2 的夹角 φ 可由公式

$$\cos\varphi=\frac{|m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2|}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}\tag{12}$$

给出．

例如，设 $L_1:\frac{x+1}{1}=\frac{y-4}{-4}=\frac{z-2}{1},\quad L_2:\frac{x+4}{2}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-1}{-1}$.

由

$$\cos\varphi=\frac{|1\times2+(-4)\times(-2)+1\times(-1)|}{\sqrt{1^2+(-4)^2+1^2}\cdot\sqrt{2^2+(-2)^2+(-1)^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

知 L_1,L_2 的夹角 $\varphi=\frac{\pi}{4}$.

与平面的情形类似，有：

L_1 与 L_2 垂直的充要条件是其方向向量 $\boldsymbol{s}_1$ 与 $\boldsymbol{s}_2$ 垂直，即

$$m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0.$$

L_1 与 L_2 平行的充要条件是其方向向量 $\boldsymbol{s}_1$ 与 $\boldsymbol{s}_2$ 平行，即

$$\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2}.$$

最后讨论直线与平面的位置关系．

设有一条直线

$$L:\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p},$$

及一个平面

$$\pi:Ax+By+Cz+D=0.$$

直线 L 与其在平面 π 上的投影直线 L_1 的夹角 φ 称为**直线 L 与平面 π 的夹角**(图 3.28)，通常规定 $0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}$.

由于

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)=\frac{|\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{s}|}{|\boldsymbol{n}|\,|\boldsymbol{s}|}$$

所以 φ 可由公式

$$\sin\varphi=\frac{|mA+nB+pC|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+p^2}}$$

确定．

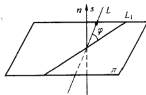


图 3.28

设 $\boldsymbol{s}=(m,n,p)$ 为 L 的方向向量．$\boldsymbol{n}=(A,B,C)$ 为平面 π 的法向量，显然有：

L 与 π 垂直的充要条件是 $\boldsymbol{s}$ 与 $\boldsymbol{n}$ 平行，即

$$\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p}.$$

L 与 π 平行的充要条件是 $\boldsymbol{s}$ 与 $\boldsymbol{n}$ 垂直，即

$$mA+nB+pC=0.$$

例 16 已知平面 π:

$$x+4y-z+2=0,$$

直线 L:

$$\frac{x+1}{1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z}{2}.$$

求直线 L 与平面 π 的交点及夹角 φ.

解 把直线 L 的方程写成参数方程得

$$\begin{cases}x=-1+t\\ y=-1-2t\\ z=2t,\end{cases}$$

代入平面方程得 $t_0=-\frac{1}{3}$,于是 L 与 π 的交点坐标为

$$\begin{cases}x_0=-\frac{4}{3}\\ y_0=-\frac{1}{3}\\ z_0=-\frac{2}{3}.\end{cases}$$

由平面 π 的法向量 $\boldsymbol{n}=(1,4,-1)$,直线 L 的方向向量 $\boldsymbol{s}=(1,-2,2)$,知 π 与 L 的夹角 φ 满足

$$\sin\varphi=\frac{|1-8-2|}{\sqrt{18}\cdot\sqrt{9}}=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

故

$$\varphi=\frac{\pi}{4}.$$

3.3.5 平面束

称通过给定直线 L 的所有平面的全体为平面束.

设 L 的一般方程为

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \tag{15}$$

$$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0. \tag{16}$$

其中系数 A_1,B_1,C_1 与 A_2,B_2,C_2 不成比例.对两个不同时为 0 的参数 λ_1,λ_2,因 A_1,B_1,C_1 与 A_2,B_2,C_2 不成比例,所以三元一次方程

$$\lambda_1(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\lambda_2(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0 \tag{17}$$

的系数 $\lambda_1A_1+\lambda_2A_2,\lambda_1B_1+\lambda_2B_2,\lambda_1C_1+\lambda_2C_2$ 不全为零,从而方程(17)是平面方程.对直线 L 上任一点 $M(x,y,z)$,由于 x,y,z 满足式(15)和式(16),故也满足式(17),从而点 $M(x,y,z)$在式(17)所确定的平面上.因此,式(17)表示的平面通过直线 L.反之,通过直线 L 的任何一个平面都可写成式(17)的形式.称方程(17)为通过直线 L 的**平面束方程**.

除平面束(17)中平面

$$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$$

外，平面束(17)中任一平面的方程都可写成

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0 \tag{18}$$

的形式，应用中常常将通过给定直线 L 的平面束方程写成(18)的形式．

例 16 求直线 L：

$$\begin{cases}2x-y+z-1=0\\x+y-z+1=0\end{cases},$$

在平面 π：

$$x+2y-z=0$$

上的投影方程．

解 L 在 π 上的投影可视为平面 π 与过直线 L 且垂直于 π 的平面 π_1 的交线．设 π_1 的方程为

$$2x-y+z-1+\lambda(x+y-z+1)=0.$$

其法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(2+\lambda,-1+\lambda,1-\lambda)$，由 $\boldsymbol{n}_1$ 与 π 的法向量 $\boldsymbol{n}=(1,2,-1)$ 垂直知

$$\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}=2+\lambda+2(-1+\lambda)-(1-\lambda)=0,$$

故 $\lambda=\frac{1}{4}$，从而 π_1 的方程为

$$3x-y+z-1=0.$$

所以，所求投影方程为

$$\begin{cases}3x-y+z-1=0\\x+2y-z=0.\end{cases}$$

例 18 求直线 L_1：

$$\begin{cases}x+y-z-1=0\\2x+y-z-2=0,\end{cases}$$

与直线 L_2：

$$\frac{x}{-2}=\frac{y}{1}=\frac{z+2}{0}$$

间的最短距离．

解 过直线 L_1 作平行于 L_2 的平面 π，则 L_2 上任一点到平面 π 的距离为 L_1 与 L_2 间的最短距离．

设平面 π 的方程为

$$x+y-z-1+\lambda(2x+y-z-2)=0,$$

由 L_2 与 π 平行，故 L_2 的方向向量 $\boldsymbol{s}$ 与 π 的法向量 $\boldsymbol{n}$ 垂直，故

$$\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{n}=-2(1+2\lambda)+(1+\lambda)+0(-1-\lambda)=0,$$

$$\lambda=-\frac{1}{3}.$$

从而平面 π 的方程为

$$x+2y-2z-1=0.$$

在 L_2 上选取一点 $M_0(0,0,-2)$，M_0 到 π 的距离为

$$d=\frac{|-2\times(-2)-1|}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}}=1.$$

故 L_1 与 L_2 的最短距离为 1.

习 题 三

1. 设 A、B、C 是任意三点，求 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}$.

2. 设平行四边形 $ABCD$ 的对角线向量 $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{BD}=\boldsymbol{b}$，试用 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 表示 $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CD},\overrightarrow{DA}$.

3. 如果平面上一个四边形的对角线互相平分，试应用向量证明它是平行四边形.

4. 设向量 $\boldsymbol{a}$ 的长度是 5，$\boldsymbol{a}$ 与轴 u 的夹角是 $30°$，求 $\boldsymbol{a}$ 在轴 u 上的投影.

5. 已知 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$，试证 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$.

6. 试证：$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}=0$ 的必要条件是 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面.

7. 设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 是三个向量，k,l 是两个数，试证：

   (1) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 与 $k\boldsymbol{a}+l\boldsymbol{b}$ 正交；

   (2) $(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 正交.

8. 已知 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 为单位向量，且满足 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=0$，计算 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}$.

9. 已知 $\boldsymbol{a}=(1,-2,3)$，$\boldsymbol{b}=(2,1,0)$，$\boldsymbol{c}=(6,-2,6)$.

   (1) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 是否与 $\boldsymbol{c}$ 平行？

   (2) 求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$，$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}\rangle$；

   (3) 求 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$，$[\boldsymbol{abc}]$；

   (4) 设 $\boldsymbol{x}=3\boldsymbol{a}+4\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{y}=2\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$，求 $\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle$.

10. 已知空间三点 $A(1,0,-1)$，$B(1,-2,0)$，$C(1,1,1)$.

    (1) 求以 OA，OB 为邻边的平行四边形的面积；

    (2) 求以 O、A、B、C 为顶点的四面体的体积.

11. 已知 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$，$\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)$，$\boldsymbol{c}=(c_x,c_y,c_z)$. 试利用行列式的性质证明：

    $$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}=(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}.$$

12. 已知向量 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{c}=2\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$，求一单位向量 $\boldsymbol{d}$，使 $\boldsymbol{d}\perp\boldsymbol{c}$，且 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{d}$ 共面.

13. 已知 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$，且向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 的长度相等，两两夹角也相等，试求 $\boldsymbol{c}$.

14. 已知 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=2$，求 $[(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})]\cdot(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a})$.

15. 求过点 $(3,0,-1)$ 且与平面 $3x-7y+5z-12=0$ 平行的平面方程.

16. 求过点 $M_0(1,0,-1)$ 且平行于向量 $\boldsymbol{a}=(2,1,1)$，$\boldsymbol{b}=(1,-1,0)$ 的平面方程.

17. 指出下列平面的特殊位置：

    (1) $x=0$；

    (2) $5y-1=0$；

    (3) $y+z=2$；

(4) $x-2z=0$;

(5) $2x-3y-z=0$.

18. 求过点 $M_0(4,-1,3)$，且平行于向量 $s=(2,1,5)$ 的直线.

19. 化直线 $\begin{cases}x-y+z=1\\2x+y+z=4\end{cases}$ 为标准方程和参数方程.

20. 求过点 $(2,0,-3)$ 且与直线

$$\begin{cases}x-2y+4z-7=0\\3x+5y-2z+1=0\end{cases}$$

垂直的平面方程.

21. 求与直线 $\begin{cases}x=1\\y=-1+t\\z=2+t\end{cases}$ 及 $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-1}{1}$ 都平行且过原点的平面.

22. 求过点 $(-1,2,3)$，垂直于直线 $\dfrac{x}{4}=\dfrac{y}{5}=\dfrac{z}{6}$，且平行于平面 $7x+8y+9z+10=0$ 的直线方程.

23. 已知两直线 $L_1:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{0}=\dfrac{z-3}{-1}$，$L_2:\dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z}{1}$，求过 L_1 且平行于 L_2 的平面方程.

24. 已知平面 $\pi_1:x-2y+2z+1=0$，$\pi_2:2x+3y-6z-6=0$，求 π_1 与 π_2 之间的夹角.

25. 已知二直线：

$$L_1:\begin{cases}x=2t\\y=-3+3t\\z=4t\end{cases}\qquad L_2:\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-2}{2}$$

问 L_1 与 L_2 是否共面，是否相交，若相交，求其交点.

26. 设二直线：

$$L_1:\begin{cases}x=-2-4t\\y=2+mt\\z=3+2t,\end{cases}\qquad L_2:\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z}{n}$$

(1) 求 m,n 使 $L_1/\!/L_2$;

(2) 求 m,n 使 $L_1\perp L_2$，并问这样的 m,n 是否唯一?

(3) 求 m,n 使 L_1 与 L_2 共面，并问这样的 m,n 是否唯一?

(4) $m=-4,n=-1$ 时，求 L_1 与 L_2 的夹角.

27. 已知平面 $\pi:x-2y-2z+4=0$，直线 $L:\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z+2}{n}$.

(1) 求 n 使 L 与 π 垂直;

(2) 求 n 使 $L/\!/\pi$;

(3) 当 $n=-2$ 时，求 L 与 π 之间的夹角;

(4) 当 $n=-2$ 时，求 L 与 π 的交点.

28. 已知平面 $\pi_1:x-y-2z=2$; $\pi_2:x+2y+z=8$, $\pi_3:x+y+z=0$，求过 π_1 与 π_2

的交线且与平面 π_3 垂直的平面的方程．

29． 判别直线与平面的位置关系：

（1） $\frac{x+3}{-2}=\frac{y+4}{-7}=\frac{z}{3}$ 与 $4x-2y-2z=3$；

（2） $\frac{x}{3}=\frac{y}{-2}=\frac{z}{7}$ 与 $3x-2y+7z=8$；

（3） $\frac{x-2}{3}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-3}{-4}$ 与 $x+y+z=3$.

30． 求点 $(-1,2,0)$ 在平面 $x+2y-z+1=0$ 上的投影．

31． 求直线 $\begin{cases}2x-4y+z=0\\3x-2z-9=0\end{cases}$ 在平面 $4x-y+z=1$ 上的投影直线的方程．

32． 求点 $A(2,4,3)$ 在直线 $x=y=z$ 上投影点的坐标及点 A 到该直线的距离．

33． 过点 $M(-4,-5,3)$，且与直线 L_1：$\frac{x+1}{3}=\frac{y+3}{-2}=\frac{z-2}{-1}$，和 L_2：$\frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-1}{-5}$ 都相交的直线方程．

34． 一平面 π 垂直于平面 $z=0$，并通过由点 $M_0(1,-1,1)$ 到直线 $\begin{cases}y-z+1=0\\x=0\end{cases}$ 的垂线，求平面 π 的方程．

第四章　n 维向量

在第三章中，我们用几何向量处理了直线、平面、角度、距离等一系列几何问题．在许多实际问题中，只用二、三维几何向量是远远不够的．比如，在气象观测中，我们不仅要了解在某个时刻云团所处的位置，还希望知道温度、压强等物理参数．因此，有必要引入 n 元数组构成的 n 维向量．本章主要研究如下几个问题：

1. 线性相关与线性无关；
2. 向量组的秩；
3. 向量空间的基底，维数，坐标．
4. 向量的内积.

4.1　n 维向量及其线性运算

4.1.1　n 维向量的定义

在几何空间中，给定一个坐标系，可使几何向量与有序实数组 (a_x, a_y, a_z) 一一对应，从而可将几何向量记为 (a_x, a_y, a_z). 在许多实际问题中，所研究的对象需要用多个数构成的有序数组来描述．因此，有必要将几何向量推广到 n 维向量．

定义 4.1　数域 F 内的 n 个数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 组成的有序数组 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$，叫做**数域 F 上的 n 维向量**(**简称向量**). 数 a_i 叫做此 n 维向量的**第 i 个分量**．如 F 是实数域，称其为**实向量**；如 F 为复数域称其为**复向量**．记 R^n 为实数域上 n 维向量的全体构成的集合．

为了方便，以后用 α, β, γ 等表示 n 维向量．

设 $\alpha=(a_1, a_2, \cdots, a_n)$，$\beta=(b_1, b_2, \cdots, b_n)$ 都是 n 维向量，当且仅当 $a_i=b_i (i=1,2,\cdots,n)$ 时，称**向量 α 与 β 相等**，记作 $\alpha=\beta$.

分量都是 0 的向量，叫做**零向量**，亦记作 0. 即　$0=(0,0,\cdots,0)$. 以后可从上、下文分辨出零向量或数零．

称向量 $(-a_1, -a_2, \cdots, -a_n)$ 为向量 $\alpha=(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 的负向量，记为 $-\alpha$.

4.1.2　n 维向量的运算

定义 4.2　设 $\alpha=(a_1, a_2, \cdots, a_n)$，$\beta=(b_1, b_2, \cdots, b_n)$ 都是 n 维向量，那么，向量 $(a_1+b_1, a_2+b_2, \cdots, a_n+b_n)$ 叫做**向量 α 与 β 的和**，记作 $\alpha+\beta$，即

$$\alpha+\beta=(a_1+b_1, a_2+b_2, \cdots, a_n+b_n).$$

利用负向量，可规定向量的减法：

$$\alpha-\beta=\alpha+(-\beta)=(a_1-b_1,a_2-b_2,\cdots,a_n-b_n).$$

定义 4.3 设 $\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$为数域 F 上 n 维向量，k 为数域 F 中数．那么，向量$(ka_1,ka_2,\cdots,ka_n)$叫做 k **与向量** α **的乘积**，记作 $k\alpha$，即

$$k\alpha=(ka_1,ka_2,\cdots,ka_n).$$

向量的加法与向量的数乘统称为向量的**线性运算**．n 维向量的线性运算满足下述八条性质：对任意 n 维向量 α,β,γ 和数 k 及 l，

(1) $\alpha+\beta=\beta+\alpha$；

(2) $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$；

(3) $\alpha+0=\alpha$；

(4) $\alpha+(-\alpha)=0$；

(5) $1\alpha=\alpha,(-1)\alpha=-\alpha,0\alpha=0$；

(6) $k(l\alpha)=(kl)\alpha$；

(7) $k(\alpha+\beta)=k\alpha+k\beta$；

(8) $(k+l)\alpha=k\alpha+l\alpha$.

4.2 向量组的线性相关与线性无关

4.2.1 线性相关与线性无关的定义

下面介绍的向量组线性相关与线性无关的概念是非常重要的数学概念，许多数学问题都是借助这两个概念解决的．

定义 4.4 对于 n 维向量 $\beta,\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 如果有一组数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$ 使

$$\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m,$$

则说向量 β 是 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 的**线性组合**，或说 β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ **线性表示**．此时称 k_1，$k_2,\cdots,k_m$ 为**组合系数或表示系数**．

例如，设 $\varepsilon_1=(1,0,0),\varepsilon_2=(0,1,0),\varepsilon_3=(0,0,1),\beta=(b_1,b_2,b_3)$则

$$\beta=(b_1,b_2,b_3)=b_1(1,0,0)+b_2(0,1,0)+b_3(0,0,1)=b_1\varepsilon_1+b_2\varepsilon_2+b_3\varepsilon_3,$$

即 β 可由 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 线性表示，表示系数是 β 的分量 b_1,b_2,b_3.

容易看到，n 维零向量 0 可由任何一个 n 维向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性表示．事实上：

$$0=0\alpha_1+0\alpha_2+\cdots+0\alpha_m.$$

这里的表示系数全是零．如果限定表示系数不全为零，有些 n 维向量组就不能表示 n 维零向量了．因此，存在不全为零的系数表示 n 维零向量是某些 n 维向量组特有的属性．我们利用这个性质定义向量组的相关性．

定义 4.5 设有 n 维向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$，如果存在一组不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$ 使

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0.$$

则称向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ **线性相关**．否则，称这个向量组**线性无关**．

例如，向量组 $\alpha_1=(1,1,-1)$，$\alpha_2=(2,-3,2)$，$\alpha_3=(3,-2,1)$线性相关．事实上，存在不全为零的数 1,1,−1 使 $1\alpha_1+1\alpha_2+(-1)\alpha_3=0$.

由线性相关的定义可以得出，如果一向量组的一部分向量构成的向量组线性相关，那么这个向量组就线性相关．事实上，设向量组为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\cdots,\alpha_s$，$(r\leqslant s)$，其中一部分，比如说 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性相关，则有不全为 0 的 $k_1,k_2,\cdots,k_r$，使

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_r\alpha_r=0.$$

于是

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_r\alpha_r+0\alpha_{r+1}+\cdots+0\alpha_s=0.$$

因 $k_1,k_2,\cdots,k_r$ 不全为 0，所以 $k_1,k_2,\cdots,k_r,0,0,\cdots,0$ 也不全为 0，因而 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性相关．

上述结论的另一种提法是，如果一个向量组线性无关，那么它的任何一个部分组也线性无关．

由线性无关的定义可知，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关的充要条件是，只有当 $k_1=k_2=\cdots=k_m=0$ 时，才有

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0.$$

例 1 讨论 n 维向量组 $\varepsilon_1=(1,0,\cdots,0)$，$\varepsilon_2=(0,1,0,\cdots,0)$，$\cdots$，$\varepsilon_n=(0,0,\cdots,0,1)$的线性相关性．

解 设有一组数 $k_1,k_2,\cdots,k_n$，使

$$k_1\varepsilon_1+k_2\varepsilon_2+\cdots+k_n\varepsilon_n=0,$$

则

$$(k_1,k_2,\cdots,k_n)=(0,0,\cdots,0).$$

于是 $k_1=k_2=\cdots=k_n=0$，从而 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关．

例 2 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，$\beta_1=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$，$\beta_2=\alpha_2+\alpha_3$，$\beta_3=\alpha_3$，试证 β_1,β_2,β_3 也线性无关．

证 设有一组数 k_1,k_2,k_3 使

$$k_1\beta_1+k_2\beta_2+k_3\beta_3=0,$$

则有

$$\begin{aligned}&k_1(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)+k_2(\alpha_2+\alpha_3)+k_3\alpha_3\\&=k_1\alpha_1+(k_1+k_2)\alpha_2+(k_1+k_2+k_3)\alpha_3\\&=0.\end{aligned}$$

由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关知，

$$\begin{cases}k_1=0\\k_1+k_2=0\\k_1+k_2+k_3=0,\end{cases}$$

故 $k_1=k_2=k_3=0$，所以 β_1,β_2,β_3 线性无关．□

4.2.2 线性相关性的一种刻划

由定义 4.5 可以看出，只含一个向量的向量组线性相关的充要条件是这个向量为零向量．下面的定理给出了含两个以上向量的向量组线性相关性的一种刻划．

定理 4.1 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m(m\geqslant 2)$线性相关的充要条件是 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 中至少有一个向量可由其余 $m-1$ 个向量线性表示．

证 充分性 不妨设 α_m 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{m-1}$线性表示，即存在一组数 $k_1,k_2,\cdots,k_{m-1}$，使

$$\alpha_m=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_{m-1}\alpha_{m-1},$$

故

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_{m-1}\alpha_{m-1}+(-1)\alpha_m=0.$$

因 $k_1,k_2,\cdots,k_{m-1},-1$ 中至少-1 不是零，所以 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性相关．

必要性 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性相关，即有一组不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$ 使

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0.$$

不妨设 $k_1\neq 0$，则有

$$\alpha_1=\frac{-k_2}{k_1}\alpha_2+\cdots+\frac{-k_m}{k_1}\alpha_m.$$

即 α_1 可由其余 $m-1$ 个向量线性表示．□

定理 4.1 揭示了线性相关与线性表示之间的联系，用线性表示从一个侧面刻划了线性相关．根据定理 4.1，向量组 α_1,α_2 线性相关的充要条件是存在数 k，使 $\alpha_1=k\alpha_2$（或 $\alpha_2=k\alpha_1$），即 α_1 与 α_2 成比例．由此可知，两个几何向量线性相关的几何意义是它们共线．类似地，三个几何向量构成的向量组线性相关的几何意义是它们共面．

4.2.3 线性相关的判定

我们试图利用矩阵判断向量组的相关性．

首先建立向量组与矩阵的联系．

n 维向量 $\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$可以看成 $1\times n$ 的矩阵（行矩阵）．n 维向量 α 也可以写成列矩阵

$$\alpha=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{bmatrix}.$$

称前者为**行向量**，后者为**列向量**．按矩阵记号，列向量的转置

$$\alpha'=(a_1,a_2,\cdots,a_n),$$

即为行向量．因此，对于列向量得到的结论，经适当改造，可以自然地成为关于行向量的结论，反之亦然．

向量组

$$\alpha_1=\begin{bmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{n1}\end{bmatrix},\quad \alpha_2=\begin{bmatrix}a_{12}\\a_{22}\\\vdots\\a_{n2}\end{bmatrix},\quad\cdots\quad \alpha_m=\begin{bmatrix}a_{1m}\\a_{2m}\\\vdots\\a_{nm}\end{bmatrix},\tag{1}$$

可以构成矩阵

$$A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm}\end{bmatrix}=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m).$$

称 A 为向量组(1)对应的矩阵，所以一个含有有限个向量的列向量组，总可以看成由一个矩阵的全体列向量所构成.

由向量组线性相关的定义可知，矩阵 A 的列向量组线性相关的充要条件是存在不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$，使

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0.$$

也就是

$$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)\begin{bmatrix}k_1\\ k_2\\ \vdots\\ k_m\end{bmatrix}=0,$$

即 $A\beta=0$，其中 $\beta=(k_1,k_2,\cdots,k_m)'\neq 0$.

类似地，还可建立一个含有有限个行向量的向量组与矩阵之间的联系.

下面给出判别向量组线性相关或线性无关的矩阵判别法.

矩阵判别法 设有 $n\times m$ 矩阵

$$A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm}\end{bmatrix},$$

则 A 的列向量组

$$\alpha_1=\begin{bmatrix}a_{11}\\ a_{21}\\ \vdots\\ a_{n1}\end{bmatrix},\quad \alpha_2=\begin{bmatrix}a_{12}\\ a_{22}\\ \vdots\\ a_{n2}\end{bmatrix},\quad \cdots,\quad \alpha_m=\begin{bmatrix}a_{1m}\\ a_{2m}\\ \vdots\\ a_{nm}\end{bmatrix}.$$

线性无关的充要条件是 $R(A)=m$，即 A 的秩等于 A 的列向量个数.

证 必要性：假若 $R(A)\neq m$，则 $R(A)\neq r<m$. 于是，存在可逆阵 P,Q，使

$$PAQ=\begin{bmatrix}E_r & 0_{r\times(m-r)}\\ 0_{(n-r)\times r} & 0_{(n-r)\times(m-r)}\end{bmatrix}.$$

故

$$PAQ\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}E_r & 0_{r\times(m-r)}\\ 0_{(n-r)\times r} & 0_{(n-r)\times(m-r)}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 0\\ \vdots\\ 0\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix},$$

$$AQ\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\end{bmatrix}=P^{-1}\begin{bmatrix}0\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}.$$

令

$$Q\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}k_1\\ k_2\\ \vdots\\ k_m\end{bmatrix},$$

由 Q 可逆知 $k_1,k_2,\cdots,k_m$ 不全为零．故

$$AQ\begin{bmatrix}0\\ 0\\ \vdots\\ 0\\ 1\end{bmatrix}=A\begin{bmatrix}k_1\\ k_2\\ \vdots\\ k_m\end{bmatrix}=(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\cdots\alpha_m)\begin{bmatrix}k_1\\ k_2\\ \vdots\\ k_m\end{bmatrix}=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0.$$

这与 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关矛盾．

充分性：若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性相关．当 $m=1$ 时，$\alpha_1=0$，故 $R(A)=0$. 这与 $R(A)=1$ 矛盾．当 $m>1$ 时，由定理 1，向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 内至少有一个向量可由其余 $m-1$ 个向量线性表示．不妨设

$$\alpha_m=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_{m-1}\alpha_{m-1}.$$

对 A 进行初等列变换：

$$A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)\xrightarrow{c_m+(-k_1)c_1+(-k_2)c_2\cdots+(-k_{m-1})c_{m-1}}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{m-1},0)=B,$$

$R(A)=R(B)\leqslant m-1$，这与 $R(A)=m$ 矛盾，故 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关．□

矩阵判别法刻划了向量组线性无关与列满秩阵之间的联系．这样，就把关于向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 的线性相关性的讨论转化成了关于矩阵的秩的讨论，即若 $R(A)<m$，则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性相关；若 $R(A)=m$，则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关．同理可证，A 的行向量组线性无关$\Leftrightarrow R(A)$等于 A 的行向量的个数．

当 A 为 n 阶方阵时，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关的充要条件是 $|A|\neq 0$.

推论 4.1 设

$$\alpha_i=\begin{bmatrix}a_{1i}\\ a_{2i}\\ \vdots\\ a_{ri}\end{bmatrix},\qquad \beta_i=\begin{bmatrix}a_{1i}\\ a_{2i}\\ \vdots\\ a_{ri}\\ a_{r+1,i}\\ \vdots\\ a_{r+s,i}\end{bmatrix}\qquad i=1,2,\cdots,m.$$

若 r 维向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关，则 $r+s$ 维向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 也线性无关．

证 令

$$B=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m)=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rm} \\ a_{r+1,1} & a_{r+1,2} & \cdots & a_{r+1,m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r+s,1} & a_{r+s,2} & \cdots & a_{r+s,m} \end{bmatrix},$$

$$A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rm} \end{bmatrix}.$$

因 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关，所以 $R(A)=m$，于是

$$m\geqslant R(B)\geqslant R(A)=m.$$

故 $R(B)=m$. 从而由矩阵判别法知 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 线性无关．□

推论 4.1 的意思是说，r 维向量组的每个向量添上 s 个分量，构成 $r+s$ 维向量组，若原来的 r 维向量组线性无关，则这个 $r+s$ 维向量组也线性无关．

推论 4.2 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 是 m 个 n 维向量，如果 $m>n$，那么，向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 必定线性相关．

证 设 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)$ 是以 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 为列的矩阵，因 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 是 n 维向量，所以 A 是 $n\times m$ 矩阵，于是 $R(A)\leqslant n<m$. 由矩阵判别法知 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性相关．□

例 3 讨论下列矩阵的列向量组的线性相关性．

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 0 & 5 \\ 7 & 4 & 0 & 7 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix};\quad B=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 7 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 8 \end{bmatrix};\quad C=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

解 A 的列向量组含有零向量，必线性相关．$R(B)\leqslant 3<4$，所以 B 的列向量组线性相关．$|C|=2\neq 0$，$R(C)=3$，所以 C 的列向量组线性无关．

例 4 设 n 维向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关．令

$$\beta_1=\alpha_1+\alpha_2,\quad \beta_2=\alpha_2+\alpha_3,\quad \beta_3=\alpha_3+\alpha_4,\quad \beta_4=\alpha_4+\alpha_1;$$

$$\gamma_1=\alpha_1+\alpha_2,\quad \gamma_2=\alpha_2+\alpha_3,\quad \gamma_3=\alpha_3+\alpha_1.$$

试证 (1) $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 线性相关；

(2) $\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$ 线性无关．

证 (1) 因 $\beta_1-\beta_2+\beta_3-\beta_4=\alpha_1+\alpha_2-\alpha_2-\alpha_3+\alpha_3+\alpha_4-\alpha_4-\alpha_1=0$. 所以 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 线性相关．

(2) 设有一组数 k_1,k_2,k_3 使

$$k_1\gamma_1+k_2\gamma_2+k_3\gamma_3=0.$$

于是 $$(k_1+k_3)\alpha_1+(k_1+k_2)\alpha_2+(k_2+k_3)\alpha_3=0.$$
因 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关，知 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，故
$$\begin{cases} k_1 \quad\quad +k_3=0 \\ k_1+k_2 \quad\quad =0 \\ \quad\quad k_2+k_3=0, \end{cases}$$
其系数行列式
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}=2\neq 0,$$
由克莱姆法则知 $k_1=k_2=k_3=0$，所以 $\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$ 线性无关．□

4.3 向量组的秩

4.3.1 极大无关组

首先，讨论向量组之间的一些关系．

设有两个向量组：(1) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$；(2) $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$．

定义 4.6 如果向量组(1)中的每个向量，都可由向量组(2)线性表示，则称向量组(1)可由向量组(2)线性表示．如果向量组(1)和(2)可以互相线性表示，则称**向量组(1)与向量组(2)等价**．

设有三个向量组(1)、(2)、(3)，容易看出，如果向量组(1)可由向量组(2)线性表示，且向量组(2)可由向量组(3)线性表示，则向量组(1)可由向量组(3)线性表示．因此，向量组的等价具有传递性．即如果向量组(1)与向量组(2)等价，且向量组(2)与向量组(3)等价，则向量组(1)与向量组(3)也等价．

定义 4.7 设 S 是 n 维向量构成的向量组，在 S 中选取 r 个向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$，如果满足

(1) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关；

(2) 任取 $\alpha\in S$，总有 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\alpha$ 线性相关．

则称向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 为向量组 S 的一个**极大线性无关向量组**(简称**极大无关组**)．

容易看出，若向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关，则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 是自己的极大无关组．

例 5 设有向量组
$$\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\3\\4\\5\end{bmatrix},\quad \alpha_2=\begin{bmatrix}0\\1\\3\\1\end{bmatrix},\quad \alpha_3=\begin{bmatrix}1\\2\\1\\4\end{bmatrix},$$
容易验证 α_1,α_2 是向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的一个极大无关组，同时 α_1,α_3 和 α_2,α_3 也都是 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的极大无关组．

由例 5 可见，向量组的极大无关组一般是不唯一的．

定理 4.2 设 n 维向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关，而向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\alpha$ 线性相关．则 α 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性表示，且表法唯一．

证 因 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\alpha$ 线性相关，故存在不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m,k$，使

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m+k\alpha=0.$$

如果 $k=0$，则有不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$，使

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0.$$

这与 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关矛盾，因此 $k\neq0$，故有

$$\alpha=-\frac{k_1}{k}\alpha_1-\frac{k_2}{k}\alpha_2-\cdots-\frac{k_m}{k}\alpha_m.$$

下面证明表示方法是唯一的，如果有两种表示法

$$\alpha=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m, \tag{2}$$

$$\alpha=k_1'\alpha_1+k_2'\alpha_2+\cdots+k_m'\alpha_m \tag{3}$$

(2)－(3)得

$$(k_1-k_1')\alpha_1+(k_2-k_2')\alpha_2+\cdots+(k_m-k_m')\alpha_m=0.$$

因 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关，所以 $k_i=k_i'(i=1,2,\cdots,m)$． □

定理 4.2 表明，向量组 S 中任一向量 α 都可由 S 的极大无关组线性表示．反之，由于向量组 S 的极大无关组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 中任一向量都取自于 S，所以 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 中任一向量都可以由 S 中向量线性表示，因此，一个向量组与它自己的任一极大无关组总是等价的．

4.3.2 向量组的秩

定理 4.3 设有两个 n 维向量组：(1)$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$；(2)$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$. 如果向量组(1)线性无关，且向量组(1)可由向量组(2)线性表示，则 $r\leqslant s$.

证 向量组(1)组可由向量组(2)线性表示，故有 $k_{ij},i=1,2,\cdots,s;j=1,2,\cdots,r$. 使

$$\begin{cases}\alpha_1=k_{11}\beta_1+k_{21}\beta_2+\cdots+k_{s1}\beta_s\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \alpha_r=k_{1r}\beta_1+k_{2r}\beta_{2r}+\cdots+k_{sr}\beta_s.\end{cases}$$

将各向量视为列矩阵，有

$$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r)=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r)\begin{bmatrix}k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1r}\\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2r}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ k_{s1} & k_{s2} & \cdots & k_{sr}\end{bmatrix}.$$

若 $r>s$，由推论 4.2 知，$(k_{ij})_{s\times r}$ 的列向量组线性相关，于是存在不全为零的数 $l_1,l_2,\cdots,l_r$，使

$$\begin{bmatrix}k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1r}\\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2r}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ k_{s1} & k_{s2} & \cdots & k_{sr}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}l_1\\ l_2\\ \vdots\\ l_r\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix},$$

故

$$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r)\begin{bmatrix}l_1\\l_2\\\vdots\\l_r\end{bmatrix}=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m)\begin{bmatrix}k_{11}&k_{12}&\cdots&k_{1r}\\k_{21}&k_{22}&\cdots&k_{2r}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\k_{s1}&k_{s2}&\cdots&k_{sr}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}l_1\\l_2\\\vdots\\l_r\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}.$$

这与 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关矛盾. □

推论 4.3 若(定理 4.3 中)向量组(1)和向量组(2)都线性无关,且向量组(1)与向量组(2)等价,则 $r=s$. 进而,同一个向量组的任意两个极大无关组等价,且含有的向量个数相同.

虽然一个向量组的极大无关组一般说是不唯一的,但推论 4.3 指出,同一个向量组的任意两个极大无关组都是等价的,并且一个向量组的极大无关组所含向量的个数由这个向量组唯一确定.

定义 4.8 向量组的极大无关组所含向量的个数称为这个**向量组的秩**.

由向量组的秩的定义可知,向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关的充要条件是这个向量组的秩等于它所含向量的个数 m.

推论 4.4 设向量组(1)的秩为 r_1,向量组(2)的秩为 r_2,若向量组(1)能由向量组(2)线性表示,则 $r_1\leqslant r_2$. 进而,等价的向量组有相同的秩.

证 设向量组(1′):$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{r_1}$ 是向量组(1)的极大无关组,向量组(2′):$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{r_2}$ 是向量组(2)的极大无关组. 由于向量组(1′)可由向量组(1)线性表示,向量组(1)可由向量组(2)线性表示,向量组(2)可由向量组(2′)线性表示,所以向量组(1′)可由向量组(2′)线性表示. 因为向量组向量组(1′)线性无关,由定理 4.4,有 $r_1\leqslant r_2$. □

4.3.3 矩阵的秩与向量组的秩的关系

定理 4.4 设 A 是 $n\times m$ 矩阵,则 A 的列向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 的秩等于矩阵 A 的秩.

证明 设 $R(A)=r$,则 A(至少)含一 r 阶子式 $D_r\neq0$. 若 D_r 位于 A 中的第 $l_1,l_2,\cdots,l_r$ 列上,$l_1<l_2<\cdots<l_r$. 则由 A 的这 r 个列向量 $\alpha_{l_1},\alpha_{l_2},\cdots,\alpha_{l_r}$ 构成的矩阵 $A_1=(\alpha_{l_1},\alpha_{l_2},\cdots,\alpha_{l_r})$ 是列满秩阵. 根据矩阵判别法,$\alpha_{l_1},\alpha_{l_2},\cdots,\alpha_{l_r}$ 线性无关. 设 α_j 是 A 的任意一个列向量,若 $l_1,l_2,\cdots,l_r$ 中某 $l_i=j$,则显然 α_j 可由 $\alpha_{l_1},\alpha_{l_2},\cdots,\alpha_{l_r}$ 线性表示,从而 $\alpha_j,\alpha_{l_1},\alpha_{l_2},\cdots,\alpha_{l_r}$ 线性相关. 否则,不妨设 $l_1<l_2<\cdots<l_i<j<l_{i+1}<\cdots<l_r,1\leqslant i\leqslant r$. 于是矩阵

$$A_2=(\alpha_{l_1},\cdots,\alpha_{l_i},\alpha_j,\alpha_{l_{i+1}},\cdots,\alpha_{l_r})$$

是 A 的子阵,故 $R(A_2)\leqslant R(A)=r<r+1$,由矩阵判别法,向量组 $\alpha_{l_1},\cdots,\alpha_{l_i},\alpha_j,\alpha_{l_{i+1}},\cdots,\alpha_{l_r}$ 线性相关. 于是 $\alpha_{l_1},\alpha_{l_2},\cdots,\alpha_{l_r}$ 是 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 的一个极大无关组,故其秩也为 r. □

注意: 由于 $R(A)=R(A')$,而 A 的行向量组的秩就是 A' 的列向量组的秩,故也等于 A 的秩. 所以

$$R(A)=A\text{ 的行向量组的秩}=A\text{ 的列向量组的秩}.$$

由定理 4.4 的证明可知,若 $R(A)=r$,D_r 是 A 的一个 r 阶非零子式,则 D_r 所在的 r 个列(行)向量就是 A 的列(行)向量组的一个极大无关组.

例 6 设有向量组

$$\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix},\quad \alpha_2=\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix},\quad \alpha_3=\begin{bmatrix}2\\1\\1\\0\end{bmatrix},\quad \alpha_4=\begin{bmatrix}0\\0\\1\\1\end{bmatrix}.$$

求该向量组的秩及其极大无关组.

解法 1 设

$$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=\begin{bmatrix}1&1&2&0\\0&1&1&0\\1&0&1&1\\0&0&0&1\end{bmatrix}.$$

A 的右下角的三阶子式

$$D=\begin{vmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{vmatrix}=1\neq 0.$$

A 的四阶子式只有一个$|A|$,且$|A|=0$,所以 $R(A)=3$,即向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的秩是 3. 由 D 位于后 3 列,知 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 是该向量的一个极大无关组.

解法 2 设

$$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=\begin{bmatrix}1&1&2&0\\0&1&1&0\\1&0&1&1\\0&0&0&1\end{bmatrix}.$$

由

$$A\xrightarrow{\text{行}}\begin{bmatrix}1&1&2&0\\0&1&1&0\\0&-1&-1&1\\0&0&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{行}}\begin{bmatrix}1&1&2&0\\0&1&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{行}}\begin{bmatrix}1&1&2&0\\0&1&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}=B,$$

知 $R(A)=3$,即向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的秩是 3. 因 B 的第 1,2,4 列构成的矩阵的秩是 3,而由 A 到 B 只用了初等行变换,所以 A 的第 1,2,4 列构成的矩阵的秩也是 3. 于是 A 的第 1,2,4 列 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ 线性无关. 故 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ 是 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的一个极大无关组. 同样地,$\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4$ 也是 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的一个极大无关组.

4.4 向量空间

4.4.1 向量空间的概念

定义 4.9 设 V 是数域 F 上的 n 维向量构成的非空集合,如果满足

(1) 若 $\alpha\in V,\beta\in V$,则 $\alpha+\beta\in V$;

(2) 若 $\alpha\in V,k\in F$,则 $k\alpha\in V$,

则称集合 V 为数域 F 上的向量空间.

上述定义中(1)(2)表明，集合 V 关于加法及数乘两种运算封闭，即在集合 V 中可进行加法及数乘两种运算．

例如，n 维实向量的全体 R^n 是一个向量空间．只含一个 n 维零向量的集合$\{0\}$也是一个向量空间．集合

$$V=\{\gamma \mid \gamma=(1,x_1,x_2),x_1,x_2\in R\}$$

不是向量空间．事实上，$\alpha=(1,1,1)\in V$，但 $2\alpha=(2,2,2)\overline{\in}V$.

例 7 集合

$$V=\{\alpha=(0,x_2,\cdots,x_n)\mid x_2,\cdots,x_n\in R\}$$

是一个向量空间．因为若 $\alpha=(0,a_2,\cdots,a_n)\in V$，$\beta=(0,b_2,\cdots,b_n)\in V$，则 $\alpha+\beta=(0,a_2+b_2,\cdots,a_n+b_n)\in V$，$k\alpha=(0,ka_2,\cdots,ka_n)\in V$.

例 8 设 α,β 为数域 F 上两个已知的 n 维向量，集合

$$V=\{\gamma \mid \gamma=k\alpha+l\beta,k,l\in F\}$$

是一个向量空间，因为若 $\gamma_1=k_1\alpha+l_1\beta$，$\gamma_2=k_2\alpha+l_2\beta$，则有

$$\gamma_1+\gamma_2=(k_1+k_2)\alpha+(l_1+l_2)\beta\in V,$$

$$k\gamma_1=(kk_1)\alpha+(kl_1)\beta\in V.$$

称这个向量空间为由**向量 α,β 生成的向量空间**．

一般地，由数域 F 上向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 生成的向量空间为

$$V=\{\gamma \mid \gamma=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m,k_1,k_2,\cdots,k_m\in F\}.$$

定义 4.10 设 V_1 及 V_2 都是同一数域 F 上的向量空间，若 $V_1\subseteq V_2$，则称 V_1 是 V_2 的**子空间**．

例如，任何由 n 维实向量组成的向量空间 V 都包含 n 维零向量，事实上，取 $\alpha\in V$，则 $0=0\alpha\in V$. 显然$\{0\}$是 V 的子空间．又 $V\subseteq R^n$，所以 n 维实向量构成的向量空间 V 总是 R^n 的子空间．

例 7 中的向量空间 V 是 R^n 的子空间．

4.4.2 向量空间的基、维数与坐标

定义 4.11 设 V 为向量空间，称 V 的极大无关组为向量空间 V 的**基**．V 的基所含的向量的个数称为 V 的**维数**．若 V 的维数是 r，则称 V 为 **r 维向量空间**．

规定向量空间$\{0\}$的维数是 0，r 维与 0 维的向量空间统称为有限维向量空间，本书只讨论有限维向量空间．

n 个 n 维向量构成的向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是 R^n 的基，当且仅当向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关．

例 9 n 维标准单位向量组

$$\varepsilon_1=(1,0,\cdots,0),\varepsilon_2=(0,1,0,\cdots,0),\cdots,\varepsilon_n=(0,0,\cdots,1)$$

是 R^n 的极大无关组，所以 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 是 R^n 的一个基，并且 R^n 的维数是 n，称 R^n 的这个基为**自然基**．

考查例 7 中的 V. 因为 V 中向量 $\varepsilon_2,\varepsilon_3,\cdots,\varepsilon_n$ 线性无关，而且 V 内任意向量 α 皆可由它们线性表示 $\alpha=(0,x_2,x_3,\cdots,x_n)=x_2\varepsilon_2+x_3\varepsilon_3+\cdots+x_n\varepsilon_n$. 所以 $\varepsilon_2,\varepsilon_3,\cdots,\varepsilon_n$ 便构成这个

V 的一个基，于是这个 V 便是 $n-1$ 维的向量空间．

若向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 是向量空间 V 的一个基，则 V 可表示为

$$V=\{\gamma\mid\gamma=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_r\alpha_r,k_1,k_2,\cdots,k_r\in F\}.$$

由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 所生成的向量空间

$$V=\{\alpha=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m\mid k_1,k_2,\cdots,k_m\in F\}.$$

显然与向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 等价，所以向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 的极大无关组就是 V 的一个基，向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 的秩便是 V 的维数．

若向量空间 $V\subseteq R^n$，则 V 的维数不会超过 n，并且，当 V 的维数为 n 时，$V=R^n$.

例 10 设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 与向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 等价，记

$$V_1=\{\alpha=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_r\alpha_r\mid k_1,k_2,\cdots,k_r\in F\},$$
$$V_2=\{\alpha=l_1\beta_1+l_2\beta_2+\cdots+l_s\beta_s\mid l_1,l_2,\cdots,l_s\in F\},$$

试证 $V_1=V_2$.

证 设任意 $\alpha\in V_1$，则 α 可由 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 线性表示，因 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 可由 $\beta_1,\cdots,\beta_s$ 线性表示，故 α 可由 $\beta_1\cdots,\beta_s$ 线性表示，所以 $\alpha\in V_2$，于是 $V_1\subseteq V_2$.

类似地可证：若任 $\alpha\in V_2$，则 $\alpha\in V_1$，于是 $V_2\subseteq V_1$.

因为 $V_1\subseteq V_2$ 且 $V_2\subseteq V_1$，所以 $V_1=V_2$. □

定义 4.12 设 V 是 r 维向量空间，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 是 V 的一个基，对任意 $\alpha\in V$，若有 $x_i\in F,i=1,2,\cdots,n$，使

$$\alpha=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_r\alpha_r,$$

便称这组数 $x_1,x_2,\cdots,x_r$ 为 α 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 下的**坐标**，记为$(x_1,x_2,\cdots,x_r)$.

由定理 4.2 知，α 关于给定的基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 的坐标，被 α 和基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 唯一地确定．

例如，在 R^3 内，$\alpha_1=(1,3,4),\alpha_2=(1,2,0),\alpha_3=(1,0,0)$构成一个基．对向量 $\alpha=(1,1,4)$，有 $\alpha=1\cdot\alpha_1+(-1)\alpha_2+1\cdot\alpha_3$，于是向量 α 关于基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的坐标为$(1,-1,1)$.

例 11 设 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{bmatrix}2&2&-1\\2&-1&2\\-1&2&2\end{bmatrix},\quad \beta=\begin{bmatrix}1\\0\\-4\end{bmatrix}$

验证 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是 R^3 是一个基，并求 β 关于这个基的坐标．

解 由 $|A|=\begin{vmatrix}2&2&-1\\2&-1&2\\-1&2&2\end{vmatrix}=-27\neq0$，知 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是 R^3 的一个基．

设 $\beta=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$，

则
$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)^{-1}\beta=\begin{bmatrix}2&2&-1\\2&-1&2\\-1&2&2\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1\\0\\-4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{2}{3}\\-\frac{2}{3}\\-1\end{bmatrix}.$$

即 β 关于这个基的坐标是$(\frac{2}{3},-\frac{2}{3},-1)$.

4.4.3 坐标变换

n 维向量空间 V 中同一向量在不同基下的坐标，一般来说是不同的，但它们毕竟是同一向量在不同基下的坐标，它们应该有内在的联系，其中的联系是什么呢？

设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 及 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 是向量空间 V 的两个基，且

$$\begin{cases}\beta_1=p_{11}\alpha_1+p_{21}\alpha_2+\cdots+p_{n1}\alpha_n\\ \beta_2=p_{12}\alpha_1+p_{22}\alpha_2+\cdots+p_{n2}\alpha_n\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \beta_n=p_{1n}\alpha_1+p_{2n}\alpha_2+\cdots+p_{nn}\alpha_n,\end{cases}$$

即
$$(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\begin{bmatrix}p_{11}&p_{12}&\cdots&p_{1n}\\p_{21}&p_{22}&\cdots&p_{2n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\p_{n1}&p_{n2}&\cdots&p_{nn}\end{bmatrix},$$

则称这个式子为**基变换公式**. 称矩阵

$$P=\begin{bmatrix}p_{11}&p_{12}&\cdots&p_{1n}\\p_{21}&p_{22}&\cdots&p_{2n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\p_{n1}&p_{n2}&\cdots&p_{nn}\end{bmatrix}$$

为由基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 到基 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 的**过渡矩阵**. 由 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 线性无关可知，过渡矩阵 P 可逆.

定理 4.5 设向量空间 V 的基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 到基 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 的过渡矩阵是 $P=(p_{ij})$，V 中向量 α 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 下的坐标是$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，在基 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 下的坐标是$(x_1',x_2',\cdots,x_n')$，则有**坐标变换公式**

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}=P\begin{bmatrix}x_1'\\x_2'\\\vdots\\x_n'\end{bmatrix},\quad 或 \begin{bmatrix}x_1'\\x_2'\\\vdots\\x_n'\end{bmatrix}=P^{-1}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}.$$

证 设

$$\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix},$$

$$\alpha=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)\begin{bmatrix}x_1'\\x_2'\\\vdots\\x_n'\end{bmatrix}=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)P\begin{bmatrix}x_1'\\x_2'\\\vdots\\x_n'\end{bmatrix}.$$

由于 α 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 下的坐标是唯一的，并且过渡矩阵 P 可逆，所以

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}=P\begin{bmatrix}x_1'\\x_2'\\\vdots\\x_n'\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}x_1'\\x_2'\\\vdots\\x_n'\end{bmatrix}=P^{-1}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}.\qquad \square$$

例 12 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 是 R^4 的一个基，

$$\alpha=\alpha_1-2\alpha_2+3\alpha_3+\alpha_4,$$

而基 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 下的坐标依次为 $(1,3,-5,7)$，$(0,1,2,-3)$，$(0,0,1,2)$，$(0,0,0,1)$。求 α 在基 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 下的坐标。

解 由 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 下的坐标可得基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 到基 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 的过渡矩阵

$$P=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\3&1&0&0\\-5&2&1&0\\7&-3&2&1\end{bmatrix}.$$

设 (x_1',x_2',x_3',x_4') 是 α 在基 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 下的坐标，(x_1,x_2,x_3,x_4) 是 α 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 下的坐标，则

$$\begin{bmatrix}x_1'\\x_2'\\x_3'\\x_4'\end{bmatrix}=P^{-1}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\frac{1}{|P|}P^*\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\-3&1&0&0\\11&-2&1&0\\-38&7&-2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\-2\\3\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\-5\\18\\-57\end{bmatrix}.$$

例 13 在 R^4 中取两个基：

$$\alpha_1=(1,2,-1,0),\alpha_2=(1,-1,1,1),\alpha_3=(-1,2,1,1),\alpha_4=(-1,-1,0,1);$$

和

$$\beta_1=(2,1,0,1),\beta_2=(0,1,2,2),\beta_3=(-2,1,1,2),\beta_4=(1,3,1,2).$$

求前一个基到后一个基的基变换公式和坐标变换公式。

解 设

$$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=\begin{bmatrix}1&1&-1&-1\\2&-1&2&-1\\-1&1&1&0\\0&1&1&1\end{bmatrix},$$

$$B=(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)=\begin{bmatrix}2&0&-2&1\\1&1&1&3\\0&2&1&1\\1&2&2&2\end{bmatrix}.$$

则 A,B 可逆，并且

$$(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)=B=AA^{-1}B=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)A^{-1}B.$$

由

$$(A\mid B)\xrightarrow{\text{行}}\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&1&0&0&1\\0&1&0&0&1&1&0&1\\0&0&1&0&0&1&1&1\\0&0&0&1&0&0&1&0\end{array}\right]=(E\mid A^{-1}B),$$

知过渡矩阵

$$P=A^{-1}B=\begin{bmatrix}1&0&0&1\\1&1&0&1\\0&1&1&1\\0&0&1&0\end{bmatrix}.$$

所以 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 到 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 的基变换公式为

$$(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\begin{bmatrix}1&0&0&1\\1&1&0&1\\0&1&1&1\\0&0&1&0\end{bmatrix}.$$

由

$$(P\mid E)\xrightarrow{\text{行}}\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&0&1&-1&1\\0&1&0&0&-1&1&0&0\\0&0&1&0&0&0&0&1\\0&0&0&1&1&-1&1&-1\end{array}\right],$$

知

$$P^{-1}=\begin{bmatrix}0&1&-1&1\\-1&1&0&0\\0&0&0&1\\1&-1&1&-1\end{bmatrix}.$$

所以由基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 到基 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 的坐标变换公式为：

$$\begin{bmatrix}x_1'\\x_2'\\x_3'\\x_4'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&-1&1\\-1&1&0&0\\0&0&0&1\\1&-1&1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}.$$

4.4.4 内积的概念

我们只讨论实向量空间 R^n 中的一种内积.

定义 4.13 设 $\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n),\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)\in R^n$,记

$$(\alpha,\beta)=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n=\sum_{k=1}^{n}a_kb_k,$$

称(α,β)为向量 α 与 β 的**内积**.

显然,n 维向量的内积是几何向量数量积的推广.

称定义了线性运算和内积的 R^n 为**欧氏空间**,以后仍用 R^n 表示这个欧氏空间.

容易验证,这里定义的内积满足下列运算规律(其中 $\alpha,\beta,\gamma\in R^n,k,l\in R$):

(1) $(\alpha,\beta)=(\beta,\alpha)$;

(2) $(k\alpha,\beta)=k(\alpha,\beta)$;

(3) $(\alpha+\beta,\gamma)=(\alpha,\gamma)+(\beta,\gamma)$;

(4) $(\alpha,\alpha)\geqslant0$,且$(\alpha,\alpha)=0\Leftrightarrow\alpha=0$;

(5) $(\alpha,k\beta+l\gamma)=k(\alpha,\beta)+l(\alpha,\gamma)$.

下面利用内积将几何向量的长度和夹角的概念推广到 R^n 中去.

定义 4.14 设 $\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)\in R^n$,令

$$|\alpha|=\sqrt{(\alpha,\alpha)}=\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2},$$

称$|\alpha|$为向量 α 的**长度**,称长度为 1 的向量为**单位向量**.

引理 向量的内积满足

$$(\alpha,\beta)^2\leqslant(\alpha,\alpha)(\beta,\beta), \tag{4}$$

即有

$$|(\alpha,\beta)|\leqslant|\alpha|\cdot|\beta|.$$

证 当 $\alpha=0$ 时,显然成立. 当 $\alpha\neq0$ 时,对任意实数 k,恒有

$$(k\alpha+\beta,k\alpha+\beta)\geqslant0,$$

即

$$k^2(\alpha,\alpha)+2k(\alpha,\beta)+(\beta,\beta)\geqslant0.$$

左边是 k 的二次三项式,由于它非负,所以判别式

$$4(\alpha,\beta)^2-4(\alpha,\alpha)(\beta,\beta)\leqslant0,$$

即

$$(\alpha,\beta)^2\leqslant(\alpha,\alpha)(\beta,\beta).$$ □

称(4)式为**许瓦兹不等式**.

定理 4.6 设 $\alpha,\beta\in R^n$,则

(1) $|\alpha|\geqslant0$,且$|\alpha|=0\Leftrightarrow\alpha=0$,(非负性);

(2) $|k\alpha|=|k||\alpha|$,(正齐次性);

(3) $|\alpha+\beta|\leqslant|\alpha|+|\beta|$,(三角不等式).

证 (1),(2)是显然的. 下面证明(3). 由许瓦兹不等式得

$$\begin{aligned}|\alpha+\beta|^2&=(\alpha+\beta,\alpha+\beta)=(\alpha,\alpha)+2(\alpha,\beta)+(\beta,\beta)\\&\leqslant|\alpha|^2+2|\alpha||\beta|+|\beta|^2=(|\alpha|+|\beta|)^2.\end{aligned}$$

两边开方得

$$|\alpha+\beta|\leqslant|\alpha|+|\beta|. \qquad \square$$

定义 4.15 设 $\alpha,\beta\in R^n,\alpha\neq 0,\beta\neq 0$，称 $\varphi=\arccos\dfrac{(\alpha,\beta)}{|\alpha||\beta|},0\leqslant\varphi\leqslant\pi$，为 α 与 β 的**夹角**.

当 $(\alpha,\beta)=0$ 时，称向量 α 与 β **正交**，记为 $\alpha\perp\beta$. 显然，若 $\alpha=0$，则 α 与 R^n 中任何向量都正交.

4.4.5 标准正交基

本段中向量都是实向量.

称两两正交的非零向量构成的向量组为**正交(向量)组**.

例 14 试证：正交向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 一定线性无关.

证 设有 $k_1,k_2,\cdots,k_m$ 使

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0.$$

用 $\alpha_i(i=1,2,\cdots,m)$ 对上式的两边作内积，得

$$k_1(\alpha_i,\alpha_1)+\cdots+k_{i-1}(\alpha_i,\alpha_{i-1})+k_i(\alpha_i,\alpha_i)+\cdots+k_m(\alpha_i,\alpha_m)=0.$$

因 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 两两正交，所以 $(\alpha_i,\alpha_j)=0,j=1,2,\cdots,i-1,i+1,\cdots,m$.

故 $$k_i(\alpha_i,\alpha_i)=0,i=1,2,\cdots,m.$$

因 $\alpha_i\neq 0$，所以 $(\alpha_i,\alpha_i)=|\alpha_i|^2\neq 0$，故 $k_i=0,(i=1,2,\cdots,m)$. 于是向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关. $\square$

由单位向量构成的正交向量组称为**标准正交向量组**.

我们常采用标准正交向量组作为向量空间的基.

定义 4.16 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 是向量空间 V 的一个基. 如果 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 两两正交，则称 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 是 V 的一个**正交基**. 如果每个向量 α_i 又都是单位向量，则称 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 是 V 的一个**标准正交基**.

显然，若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\in R^n$，则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是 R^n 的标准正交基的充要条件是

$$(\alpha_i,\alpha_j)=\begin{cases}1 & \text{当 } i=j\\ 0 & \text{当 } i\neq j\end{cases}\qquad (i,j=1,2,\cdots,n).$$

例 15 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 是向量空间 V 的一个标准正交基，$\alpha\in V,\alpha=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots k_m\alpha_m$，试证 $k_i=(\alpha_i,\alpha),i=1,2,\cdots,m$.

证 用 α_i 与 α 做内积，因 $(\alpha_i,\alpha_j)=\begin{cases}0 & i\neq j\\ 1 & i=j,\end{cases}$ 有

$$\begin{aligned}(\alpha_i,\alpha)&=(\alpha_i,k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m)\\&=(\alpha_i,k_i\alpha_i)=k_i(\alpha_i,\alpha_i)=k_i,\quad i=1,2,\cdots,m.\end{aligned}\qquad\square$$

由上例可以看出，求一个向量被标准正交基线性表示的表示系数是容易的，这是标准正交基的优点之一.

在几何空间中，直角坐标系中的 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 就构成 R^3 的一个标准正交基.

4.4.6 施密特正交化方法

本段中向量都是实向量.

我们经常遇到已知向量空间 V 的基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$，进而求向量空间 V 的一个标准正交基的问题. 这个问题等同于下面的问题.

设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 是 n 维向量构成的线性无关向量组.

(1) 求与 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 等价的正交向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$；

(2) 求与 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 等价的标准正交向量组 $\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_m$.

称(1)为正交化过程，称(2)为标准化过程.

为将向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 标准化，只须令

$$\gamma_1=\frac{\beta_1}{|\beta_1|},\quad \gamma_2=\frac{\beta_2}{|\beta_2|},\quad \cdots,\gamma_m=\frac{\beta_m}{|\beta_m|}$$

即可.

可以按如下的施密特正交化方法将向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 正交化.

令 $\beta_1=\alpha_1$,

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1,$$

$$\beta_3=\alpha_3-\frac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2,$$

$$\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots$$

$$\beta_m=\alpha_m-\frac{(\alpha_m,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(\alpha_m,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2-\cdots-\frac{(\alpha_m,\beta_{m-1})}{(\beta_{m-1},\beta_{m-1})}\beta_{m-1}.$$

则 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 是与 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 等价的正交向量组.

例 16 设

$$\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\0\\1\\1\end{bmatrix},\quad \alpha_2=\begin{bmatrix}0\\1\\1\\0\end{bmatrix},\quad \alpha_3=\begin{bmatrix}0\\0\\1\\1\end{bmatrix},$$

求与 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 等价的标准正交向量组.

解 取

$$\beta_1=\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\0\\1\\1\end{bmatrix};$$

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=\begin{bmatrix}0\\1\\1\\0\end{bmatrix}-\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1\\0\\1\\1\end{bmatrix}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}-1\\3\\2\\-1\end{bmatrix};$$

$$\beta_3=\alpha_3-\frac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2=\begin{bmatrix}0\\0\\1\\1\end{bmatrix}-\frac{2}{3}\begin{bmatrix}1\\0\\1\\1\end{bmatrix}-\frac{1}{15}\begin{bmatrix}-1\\3\\2\\-1\end{bmatrix}=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}-3\\-1\\1\\2\end{bmatrix}.$$

再取

$$\gamma_1=\frac{\beta_1}{|\beta_1|}=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}1\\0\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\\0\\\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix};$$

$$\gamma_2=\frac{\beta_2}{|\beta_2|}=\frac{3\beta_2}{|3\beta_2|}=\frac{1}{\sqrt{15}}\begin{bmatrix}-1\\3\\2\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{-1}{\sqrt{15}}\\\frac{3}{\sqrt{15}}\\\frac{2}{\sqrt{15}}\\\frac{-1}{\sqrt{15}}\end{bmatrix};$$

$$\gamma_3=\frac{\beta_3}{|\beta_3|}=\frac{5\beta_3}{|5\beta_3|}=\frac{1}{\sqrt{15}}\begin{bmatrix}-3\\-1\\1\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{-3}{\sqrt{15}}\\\frac{-1}{\sqrt{15}}\\\frac{1}{\sqrt{15}}\\\frac{2}{\sqrt{15}}\end{bmatrix}.$$

则 $\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$ 为与 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 等价的标准正交向量组．

4.4.7 正交矩阵

容易看出，$n\times n$ 实矩阵 $A=(\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n)$ 的列向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是 R^n 的基的充要条件是 A 可逆．为了刻划 R^n 的标准正交基，我们引入正交阵的概念．

定义 4.17 如果 n 阶实方阵 A 满足

$$A'A=E,$$

则称 A 为**正交(矩)阵**．

n 阶正交阵 A 具有如下性质：

(1) A 是可逆阵，且 $A^{-1}=A'$；

(2) A' 也是正交阵(从而 A^{-1} 也是正交阵)；

(3) 对任意 n 维列向量 X，AX 保持向量 X 的长度，即

$$|AX|=|X|$$

(4) 对任意 n 维列向量 X 和 Y，AX 和 AY 保持 X 和 Y 的内积，即

$$(AX,AY)=(X,Y).$$

我们给出(3)的证明，请读者给出其余证明．

证 (3) $|AX|=\sqrt{(AX,AX)}=\sqrt{(AX)'AX}=\sqrt{X'(A'A)X}=\sqrt{X'X}$

$=\sqrt{(X,X)}=|X|.$ □

定理 4.7 设有 $n\times n$ 实矩阵

$$A=(\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n).$$

则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 构成 R^n 的一个标准正交基的充要条件是 A 是正交矩阵．

证 依题设可得

$$A'A=\begin{bmatrix}\alpha'_1\\ \alpha'_2\\ \vdots\\ \alpha'_n\end{bmatrix}(\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n)=\begin{bmatrix}(\alpha_1,\alpha_1) & (\alpha_1,\alpha_2) & \cdots & (\alpha_1,\alpha_n)\\ (\alpha_2,\alpha_1) & (\alpha_2,\alpha_2) & \cdots & (\alpha_2,\alpha_n)\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ (\alpha_n,\alpha_1) & (\alpha_n,\alpha_2) & \cdots & (\alpha_n,\alpha_n)\end{bmatrix}. \qquad (5)$$

必要性：因 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是 R^n 的标准正交基，所以

$$(\alpha_i,\alpha_j)=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}\qquad i,j=1,2,\cdots,n.$$

由式(5)知

$$A'A=E.$$

充分性：由 A 可逆知 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是 R^n 的基．因 A 是正交阵知

$$A'A=E_n.$$

由式(5)可得

$$(\alpha_i,\alpha_j)=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}\qquad i,j=1,2,\cdots,n,$$

于是 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是 R^n 的标准正交基． □

利用定理 4.7 可以方便地判断矩阵是否为正交阵，比如

$$A=\begin{bmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{bmatrix},\qquad B=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\end{bmatrix}.$$

易知 $A'A=E,B'B=E$，所以 A,B 都是正交阵．由 C 的列向量组是 R^4 的标准正交基，知 C 也是正交阵．

注意：①由正交阵的性质(2)，正交阵 A 的行向量组也是 R^n 的标准正交基．②定理 4.7 中的"标准"两字是不能去掉的．例如，虽然 $\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix},\alpha_2=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$是 R^2 的正交基，但是 $A=(\alpha_1,\alpha_2)=\begin{bmatrix}1&1\\-1&1\end{bmatrix}$不是正交阵．

习　题　四

1. 设 $\alpha_1=\begin{bmatrix}2\\1\\3\\1\end{bmatrix}$，$\alpha_2=\begin{bmatrix}1\\3\\1\\2\end{bmatrix}$，$\alpha_3=\begin{bmatrix}4\\1\\-1\\1\end{bmatrix}$，试求满足下式的 α：

$2(\alpha_1-\alpha)+5(\alpha_2+\alpha)=2(\alpha_3+\alpha)$.

2. 设 A 是 n 阶实对称矩阵，试证对任意 α、$\beta\in R^n$，都有：

(1) $\alpha'\beta=\beta'\alpha$，

(2) $(A\alpha)'\beta=(A\beta)'\alpha$.

3. 设 A 是 n 阶可逆阵，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k$ 是 k 个 n 维列向量．试证 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k$ 线性无关当且仅当 $A\alpha_1,A\alpha_2,\cdots,A\alpha_k$ 线性无关．

4. 判定下列向量组是否线性相关，为什么？

(1) $\alpha_1=\begin{bmatrix}-3\\2\\4\end{bmatrix}$，　$\alpha_2=\begin{bmatrix}6\\-4\\-8\end{bmatrix}$；

(2) $\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$，　$\alpha_2=\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix}$，　$\alpha_3=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$；

(3) $\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}$，　$\alpha_2=\begin{bmatrix}2\\1\\3\end{bmatrix}$，　$\alpha_3=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$；

(4) $\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}$，　$\alpha_2=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$，　$\alpha_3=\begin{bmatrix}2\\5\\0\end{bmatrix}$；

(5) $\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}$，　$\alpha_2=\begin{bmatrix}3\\2\\0\\0\end{bmatrix}$，　$\alpha_3=\begin{bmatrix}2\\7\\4\\5\end{bmatrix}$；　$\alpha_4=\begin{bmatrix}2\\3\\1\\0\end{bmatrix}$；

(6) $\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix}$，　$\alpha_2=\begin{bmatrix}2\\2\\0\\0\end{bmatrix}$，　$\alpha_3=\begin{bmatrix}2\\1\\3\\1\end{bmatrix}$.

5. 判断下列命题是否正确：

(1) 若有常数 k_1,k_2,k_3 使 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=0$，则向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关；

(2) 若 β 不能表为 α_1,α_2 的线性组合，则向量组 α_1,α_2,β 线性无关；

(3) 若 α_1,α_2 线性无关，且 β 不能由 α_1,α_2 线性表示，则 n 维向量组 α_1,α_2,β 线性无关；

(4) 若向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关，则 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 中任一向量都可由其余 2 个向量线性表示；

(5) 若向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 中任意一个向量都可以由其余 2 个向量线性表示，则 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关；

(6) 若向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 中任两个向量都线性无关，则 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 也线性无关；

(7) 设有一组数 k_1,k_2,k_3，使 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=0$，且 α_3 可由 α_1,α_2 线性表示，则 $k_3\neq 0$；

(8) 若向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关，则 α_1 可表示为其余向量的线性组合．

6. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关．若 β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，试证表示式是唯一的．

7. 设 β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，且表示法是唯一的，试证 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关．

8. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关，$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关．试证

(1) α_1 可由 α_2,α_3 线性表示；

(2) α_4 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示．

9. 已知 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta$ 线性无关，令

$$\beta_1=\alpha_1+\beta,\quad \beta_2=\alpha_2+2\beta,\quad \beta_3=\alpha_3+3\beta,$$

试证 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta$ 线性无关．

10. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 可由 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 线性表示，且 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关．试证，向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 线性无关．

11. 设 α 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，但 α 不能由 α_2,α_3 线性表示，试证：α_1 可由 α,α_2,α_3 线性表示．

12. 设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 与向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\beta$ 的秩相等．试证：向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 与向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\beta$ 等价．

13. 确定数 a 使向量组

$$\alpha_1=\begin{bmatrix}a\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix},\quad \alpha_2=\begin{bmatrix}1\\a\\\vdots\\1\end{bmatrix},\quad \cdots,\quad \alpha_n=\begin{bmatrix}1\\\vdots\\1\\a\end{bmatrix},$$

的秩为 n.

14. 设 A 与 B 分别为 $m\times p$ 与 $p\times n$ 矩阵，证明：

$$R(AB)\leqslant\min\{R(A),R(B)\}.$$

(注：学过第二章 2.7 节的同学，不必做此题．)

15. 设有向量组

$$\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix},\quad \alpha_2=\begin{bmatrix}2\\1\\3\end{bmatrix},\quad \alpha_3=\begin{bmatrix}3\\1\\4\end{bmatrix},\quad \alpha_4=\begin{bmatrix}0\\2\\0\end{bmatrix},\quad \alpha_5=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix},\text{试求：}$$

(1) 该向量组的秩；

(2) 该向量组的一个极大无关组；

(3) 用(2)中选定的极大无关组表示该向量组中其余向量．

16. 试证：由向量 $\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$， $\alpha_2=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$， $\alpha_3=\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}$ 所生成的向量空间就是 R^3.

17. 由 $\alpha_1=(1,2,1,0)$，$\alpha_2=(1,0,1,0)$所生成的向量空间记作 V_1，由 $\beta_1=(0,1,0,0)$，$\beta_2=(3,0,3,0)$所生成的向量空间记作 V_2，证明 $V_1=V_2$.

18. 设$V_1=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid x_1,x_2,\cdots,x_n\in R$ 满足 $x_1+x_2+\cdots+x_n=0\}$

$V_2=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid x_1,x_2,\cdots,x_n\in R$ 满足 $x_1+x_2+\cdots+x_n=1\}$

问 V_1,V_2 是不是向量空间？为什么？

19. 设$\alpha_1=(1,2,1)$， $\alpha_2=(2,3,3)$， $\alpha_3=(3,7,1)$.

$\beta_1=(3,1,4)$， $\beta_2=(5,2,1)$， $\beta_3=(1,1,-6)$.

(1)验证 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$；$\beta_1,\beta_2,\beta_3$ 都是 R^3 的基；

(2)求由前一组基到后一基的过渡矩阵；

(3)求向量$(0,-2,3)$在这两组基下的坐标．

20. 设 $a_1,a_2,\cdots,a_k$ 是互不相同的 k 个数，又 $k\leqslant n$，证明 n 维向量组

$$\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\a_1\\a_1^2\\\vdots\\a_1^{n-1}\end{bmatrix},\qquad \alpha_2=\begin{bmatrix}1\\a_2\\a_2^2\\\vdots\\a_2^{n-1}\end{bmatrix},\qquad \cdots,\alpha_k=\begin{bmatrix}1\\a_k\\a_k^2\\\vdots\\a_k^{n-1}\end{bmatrix}$$

线性无关．

21. 设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 与向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 的秩相等，且 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 可由向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 线性表示，证明这两个向量组等价．

22. 设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\alpha_{r+1},\cdots,\alpha_m$ 的秩为 s，向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 的秩是 t，试证

$$t\geqslant r+s-m.$$

23. 设有 n 维列向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 和 n 维列向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$. 记

$$A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s),B=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t),$$

则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 可由向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 线性表示的充要条件是存在矩阵 C 使

$$A=BC.$$

24. 设 $m\times n$ 矩阵 A 经初等列变换化成矩阵 B. 试证 A 的列向量组与 B 的列向量组等价．

25. 设向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$ 和向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 满足

$$(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)K,$$

其中 K 为 $s\times r$ 矩阵，且 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关，证明 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$ 线性无关的充要条件是矩阵 K 的秩 $R(K)=r$.

26. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是一组 n 维向量，证明该向量组线性无关的充要条件是：任一 n 维向量都可由它们线性表示．

27. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是 R^n 的一个基，$\alpha\in R^n$，若$(\alpha,\alpha_i)=0,i=1,2,\cdots,n$，则 $\alpha=0$.

28. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是 R^n 的一个标准正交基，

$$\beta_1 = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n, \qquad \beta_2 = y_1\alpha_1 + y_2\alpha_2 + \cdots + y_n\alpha_n$$

试证：　$(\beta_1, \beta_2) = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n$.

29. 已知 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是 R^3 的一个标准正交基，求 $\beta_1 = \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3$ 与 $\beta_2 = 2\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3$ 的内积.

30. 将向量组

$$\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \alpha_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

标准正交化.

31. 设 A, B 都是 n 阶正交阵，试证：

(1) A^{-1} 也是正交阵；

(2) AB 也是正交阵.

第五章　线性方程组

在第一章中，我们曾用Cramer法则来求解线性方程组．那时，对线性方程组有两个限制，一个是线性方程组中方程的个数和未知数的个数相等，另一个是系数行列式不等于零．本章将去掉这两个限制，讨论一般的线性方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m, \end{cases}$$

其中 $a_{ij},b_i(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$都是常数．

本章主要讨论如下几个问题：

1. 方程组有解的充要条件；
2. 方程组有唯一解的充要条件；
3. 方程组有无穷多解的充要条件；
4. 方程组解的结构；
5. 如何解具体的线性方程组．

5.1　线性方程组有解的条件

5.1.1　基本概念

许多实际问题都可归结为一个线性方程组．我们先介绍线性方程组的有关概念．

设有线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m. \end{cases} \tag{1}$$

记

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}x_2 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},\beta=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{bmatrix},X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix},$$

则式(1)可写成矩阵形式

$$AX=\beta. \tag{2}$$

记

$$\alpha_1=\begin{bmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{m1}\end{bmatrix},\quad \alpha_2=\begin{bmatrix}a_{12}\\a_{22}\\\vdots\\a_{m2}\end{bmatrix},\cdots,\quad \alpha_n=\begin{bmatrix}a_{1n}\\a_{2n}\\\vdots\\a_{mn}\end{bmatrix},$$

则式(2)可写成向量形式

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=\beta. \tag{3}$$

称 A 为方程组(1)的**系数矩阵**.

记

$$B=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}&b_1\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}&b_2\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}&b_m\end{bmatrix},$$

称 B 为方程组(1)的**增广矩阵**.

若 $x_1=d_1,x_2=d_2,\cdots,x_n=d_n$ 为方程组(1)的解,则称

$$X=\begin{bmatrix}d_1\\d_2\\\vdots\\d_n\end{bmatrix}$$

为方程组(1)的**解(向量)**. 显然,这个向量 X 就是方程组(2)的解.

若方程组有解,则称这个方程组是**相容的**,否则称这个方程组**不相容**.

若式(1)中 $b_1,b_2,\cdots,b_m$ 不全为 0,则称式(1)为**非齐次线性方程组**;若式(1)中 $b_1=b_2=\cdots=b_m=0$,则称式(1)为**齐次线性方程组**.

由于 $x_1=x_2=\cdots=x_n=0$ 是齐次线性方程组的零解,所以,齐次线性方程组总是相容的.

5.1.2 非齐次线性方程有解的充要条件

由(3)式可知,方程组(1)的解就是向量 β 用向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性表示的系数. 因此,下面三种提法等价:

(1)方程组(1)有解;

(2)向量 β 可由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性表示;

(3)向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 与向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\beta$ 等价.

下面的定理给出了判定非齐次线性方程组是否有解的一种实用方法.

定理 5.1 非齐次线性方程组(1)有解的充要条件是它的系数矩阵的秩等于其增广阵的秩,即

$$R(A)=R(B).$$

证 必要性:因方程组(1)有解,所以向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 与向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\beta$ 等价,于是:

$R(A)$=向量组$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$的秩=向量组$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\beta\}$的秩$=R(B)$.

充分性:记$R(A)=R(B)=r$. 不妨设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$是向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$的一个极大无关组. 由$R(B)=r$,知$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$也是$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\beta$的一个极大无关组. 于是$\beta$可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性表示,当然$\beta$也就可以由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\alpha_{r+1},\cdots,\alpha_n$线性表示. 故(1)式有解. □

5.2 线性方程组解的结构

5.2.1 齐次线性方程组解的结构

设有齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=0 \end{cases} \tag{4}$$

写成矩阵形式为

$$AX=0, \tag{5}$$

写成向量形式为

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=0. \tag{6}$$

记$N(A)$为齐次线性方程组(5)的全体解向量所构成的(解)集合.

定理 5.2 齐次线性方程组(5)的解集合$N(A)$是向量空间,并且$N(A)$的维数是$n-R(A)$.

证 设ξ_1,ξ_2都是方程组(5)的解,因为$A(\xi_1+\xi_2)=A\xi_1+A\xi_2=0, A(k\xi_1)=kA(\xi_1)=k0=0$,所以$\xi_1+\xi_2,k\xi_1$($k$为任意常数)也是式(5)的解,故$N(A)$是向量空间.

设$R(A)=r$,若$r=n$,则$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_n$线性无关.故式(6)只有唯一的零解,于是,$N(A)=\{0\}$,$N(A)$的维数$=0=n-r$;若$r<n$,不妨设$A$的左上角的$r$阶子式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0,$$

则A的前r个行向量是A的行向量组的极大无关组,所以方程组(4)的后$m-r$个方程可由前r个方程线性表示. 这样,方程组(4)与下面的方程组同解:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+\cdots+a_{1r}x_r=-a_{1,r+1}x_{r+1}-\cdots-a_{1n}x_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{r1}x_1+\cdots+a_{rr}x_r=-a_{r,r+1}x_{r+1}-\cdots-a_{rn}x_n. \end{cases} \tag{7}$$

任给$x_{r+1},\cdots,x_n$一组值,则式(7)右端成为已知常数,应用 Cramer 法则,可以唯一地确定式(5)的一个解$(x_1,x_2,\cdots,x_r,x_{r+1},\cdots,x_n)$,现分别取下面$n-r$组数值

$$x_{r+1}=1,\quad x_{r+2}=0,\quad \cdots, x_n=0;$$
$$x_{r+1}=0,\quad x_{r+2}=1,\quad \cdots, x_n=0;$$
$$\cdots\quad \cdots\quad \cdots\quad \cdots$$
$$x_{r+1}=0,\quad x_{r+2}=0,\quad \cdots, x_n=1.$$

可得 $n-r$ 个解向量

$$\xi_1=\begin{bmatrix} d_{11}\\ d_{21}\\ \vdots\\ d_{r1}\\ 1\\ 0\\ \vdots\\ 0 \end{bmatrix},\quad \xi_2=\begin{bmatrix} d_{12}\\ d_{22}\\ \vdots\\ d_{r2}\\ 0\\ 1\\ \vdots\\ 0 \end{bmatrix},\quad \cdots\cdots\quad ,\xi_{n-r}=\begin{bmatrix} d_{1,n-r}\\ d_{2,n-r}\\ \vdots\\ d_{r,n-r}\\ 0\\ \vdots\\ 1 \end{bmatrix}.$$

因向量组 $\begin{bmatrix}1\\0\\ \vdots\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\ \vdots\\0\end{bmatrix},\cdots,\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\0\\1\end{bmatrix}$ 线性无关，由第四章推论 4.1 知向量组 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 线性无关.

设 $\xi=\begin{bmatrix}k_1\\k_2\\ \vdots\\k_n\end{bmatrix}$ 是式(7)的任一解向量．记

$$\eta=k_{r+1}\xi_1+k_{r+2}\xi_2+\cdots+k_n\xi_{n-r}=\begin{bmatrix}\sum_{i=1}^{n-r}k_{r+i}d_{1i}\\ \vdots\\ \sum_{i=1}^{n-r}k_{r+i}d_{ri}\\ k_{r+1}\\ \vdots\\ k_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}d_1\\d_2\\ \vdots\\d_r\\k_{r+1}\\ \vdots\\k_n\end{bmatrix}.$$

因 $N(A)$是 R^n 的子空间，所以 η 也是式(7)的解向量，所以 $\begin{bmatrix}k_1\\ \vdots\\k_r\end{bmatrix}$ 与 $\begin{bmatrix}d_1\\ \vdots\\d_r\end{bmatrix}$ 都是方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+\cdots+a_{1r}x_r=-a_{1,r+1}k_{r+1}-\cdots-a_{1n}k_n\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{r1}x_1+\cdots+a_{rr}x_r=-a_{r,r+1}k_{r+1}-\cdots-a_{rn}k_n \end{cases}\tag{8}$$

的解向量，由 Cramer 法则，知(8)的解是唯一的，所以 $k_1=d_1,k_2=d_2,\cdots,k_r=d_r$，故 $\xi=\eta=k_{r+1}\xi_1+k_{r+2}\xi_2+\cdots+k_n\xi_{n-r}$. 于是 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r},\xi$ 线性相关，所以 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$是 $N(A)$

的基，因此，式(5)的解空间 $N(A)$ 的维数是 $n-r$. $\square$

还可按如下方法证明 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r},\xi$ 线性相关：令 $B=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r},\xi)$，则 $AB=(A\xi_1,A\xi_2,\cdots,A\xi_{n-r},A\xi)=0$. 由 2.7 节的(6)知 $R(B)\leqslant n-R(A)<n-r+1$，从而 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r},\xi$ 线性相关.

推论 5.1 设 A 是 $m\times n$ 矩阵，$X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)'$，则

(1)$AX=0$ 有唯一解(只有零解)$\Leftrightarrow R(A)$ 等于未知数的个数 $n\Leftrightarrow A$ 为列满秩阵；

(2)$AX=0$ 有无穷多解(有非零解)$\Leftrightarrow R(A)$ 小于未知数的个数 n；

(3)当 $r=R(A)<n$ 时，设 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 是 $N(A)$ 的基，则 $AX=0$ 的解空间可表示成

$$N(A)=\{X\mid X=k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r},k_1,k_2,\cdots,k_{n-r}\in F\},$$

称 $N(A)$ 的基 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 为方程组(4)的**基础解系**. 方程组(4)的通解可以表示成

$$X=k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r},$$

其中 $k_1,k_2,\cdots,k_{n-r}$ 为任意常数.

当 $R(A)=n$ 时，方程组(4)只有零解，$N(A)=\{0\}$. 此时，方程组(4)没有基础解系.

当 $R(A)<n$ 时，$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 为 $AX=0$ 的基础解系的充要条件是：

$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 为 $AX=0$ 的 $n-R(A)$ 个解向量构成的**线性无关向量组**.

推论 5.2 n 个未知数 n 个方程的齐次线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n=0\\ a_{21}x_1+\cdots+a_{2n}x_n=0\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{n1}x_1+\cdots+a_{nn}x_n=0,\end{cases}$$

有非零解的充要条件是它的系数行列式 $|A|=0$.

例 1 求方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3-x_4=0\\ x_1-x_2+x_3-3x_4=0\\ x_1+3x_2+x_3+x_4=0\end{cases}$$

的基础解系和通解.

解 由

$$A=\begin{bmatrix}1&1&1&-1\\1&-1&1&-3\\1&3&1&1\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{行}}\begin{bmatrix}1&1&1&-1\\0&-2&0&-2\\0&0&0&0\end{bmatrix},$$

知 $R(A)=2$，又 $\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1\\1&-1\end{vmatrix}=-2\neq0$，所以该方程组与

$$\begin{cases}x_1+x_2=-x_3+x_4\\ x_1-x_2=-x_3+3x_4\end{cases}$$

同解.

取两组数 $x_3=1,x_4=0$；$x_3=0,x_4=1$，解得一个基础解系

$$\xi_1=\begin{bmatrix}-1\\0\\1\\0\end{bmatrix},\xi_2=\begin{bmatrix}2\\-1\\0\\1\end{bmatrix}.$$

于是通解

$$X=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=k_1\begin{bmatrix}-1\\0\\1\\0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}2\\-1\\0\\1\end{bmatrix},k_1,k_2\text{ 为任意常数}.$$

5.2.2 非齐次线性方程组解的结构

设有非齐次线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2\\\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m,\end{cases}\tag{9}$$

称齐次线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0\\\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=0\end{cases}\tag{10}$$

为非齐次线性方程组(9)的导出组，或称(10)为与(9)对应的齐次线性方程组．为方便，分别将式(9)和式(10)写成矩阵形式 $AX=\beta$ 和 $AX=0$.

定理 5.3 方程组(9)与方程组(10)的解向量满足：

(1)若 η_1,η_2 都是式(9)的解，则 $\eta_1-\eta_2$ 是式(10)的解；

(2)若 η 是式(9)的解，ξ 是式(10)的解，则 $X=\xi+\eta$ 还是式(9)的解．

证 (1) $A(\eta_1-\eta_2)=A\eta_1-A\eta_2=\beta-\beta=0$，即 $\eta_1-\eta_2$ 是式(10)的解；

(2) $A(\xi+\eta)=A\xi+A\eta=0+\beta=\beta$，即 $\xi+\eta$ 是式(9)的解． □

推论 5.3 设 A 是方程组(9)的系数矩阵，B 是(9)的增广矩阵，n 是(9)的未知数个数，则

(1) 方程组(9)有唯一解$\Leftrightarrow R(A)=R(B)=n$；

(2) 方程组(9)有无穷多解$\Leftrightarrow R(A)=R(B)<n$.

证 (1) 必要性：因(9)有解，所以 $R(A)=R(B)$. 因(9)的解唯一，由定理 5.3 的(2)知(10)的解唯一，于是由推论 5.1 知 $R(A)=n$.

充分性：因 $R(A)=R(B)$，所以(9)有解．若(9)有两个以上不同的解，由定理 5.3 的(1)知(10)有非零解，这与 $R(A)=n$ 矛盾；故(9)有唯一解．

(2)必要性：因(9)有解，所以 $R(A)=R(B)$. 因(9)有无穷多解，由定理 5.3 的(1)知，

(10)有非零解，于是由推论 5.1 知 $R(A)<n$.

充分性：因 $R(A)=R(B)$ 所以(9)有解．因 $R(A)<n$，由推论 5.1 知(9)有无穷多解，于是由定理 5.3 的(2)知，(9)有无穷多解． ▯

当 $r=R(A)=R(B)<n$（n 为未知数个数）时，设 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 是(10)的一个基础解系，η^* 是(9)的一个特解，则(9)的通解可表成

$$X=\eta^*+k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r}, \tag{11}$$

其中 $k_1,k_2,\cdots,k_{n-r}$ 为任意常数．

事实上，由定理 5.3 的(2)及 $k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r}$ 是(10)的解知，(11)是(9)的解．反之，设 η 是(9)的任意一个解，由定理 5.3 的(1)知，$\eta-\eta^*$ 是(10)的解．$\eta-\eta^*$ 可由 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 线性表示，即存在数 $k_1,k_2,\cdots,k_{n-r}$ 使 $\eta=\eta^*+k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r}$.

例 2 讨论方程组

$$\begin{cases} ax_1+(a-1)x_2+x_3=1 \\ ax_1+ax_2+x_3=2 \\ 2ax_1+2(a-1)x_2+ax_3=2 \end{cases}$$

何时无解？何时有唯一解？何时有无穷多解？

解法 1 由

$$B=[A \vdots \beta]=\begin{bmatrix} a & a-1 & 1 & 1 \\ a & a & 1 & 2 \\ 2a & 2(a-1) & a & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{行}} \begin{bmatrix} a & a-1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a-2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{行}} \begin{bmatrix} a & 0 & 1 & 2-a \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a-2 & 0 \end{bmatrix}$$

可知，当 $a=0$ 时，

$$R(A)=R\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}=2, \quad R(B)=R\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}=3,$$

方程组无解；

当 $a\neq 0$ 且 $a\neq 2$ 时，$R(A)=R(B)=3$，方程组有唯一解；

当 $a=2$ 时，$R(A)=R(B)=2<3$，方程组有无穷多解．

解法 2 由于系数矩阵是方阵，因此可用 Cramer 法则来讨论．

$$|A|=\begin{vmatrix} a & a-1 & 1 \\ a & a & 1 \\ 2a & 2a(-1) & a \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & a-1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a-2 \end{vmatrix}=a(a-2).$$

当 $a\neq 0$ 且 $a\neq 2$ 时，$|A|\neq 0$，方程组有唯一解．

当 $a=0$ 时，

$$B=[A \vdots \beta]=\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{行}}\begin{bmatrix}0 & -1 & 1 & \vdots & 1\\0 & 0 & 1 & \vdots & 2\\0 & 0 & -2 & \vdots & 0\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{行}}\begin{bmatrix}0 & -1 & 1 & \vdots & 1\\0 & 0 & 1 & \vdots & 2\\0 & 0 & 0 & \vdots & 4\end{bmatrix}$$

所以，$R(A)=2, R(B)=3$，方程组无解.

当 $a=2$ 时，

$$B=[A \vdots \beta]=\begin{bmatrix}2 & 1 & 1 & \vdots & 1\\2 & 2 & 1 & \vdots & 2\\4 & 2 & 2 & \vdots & 2\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{行}}\begin{bmatrix}2 & 1 & 1 & \vdots & 1\\0 & 1 & 0 & \vdots & 1\\0 & 0 & 0 & \vdots & 0\end{bmatrix}.$$

所以，$R(A)=R(B)=2<3$，方程组有无穷多解.

例 3 设 A 是 4 阶方阵，$\beta(\neq 0)$ 是 4×1 矩阵，$R(A)=2$，η_1,η_2,η_3 和 η_4 都是非齐次线性方程组 $AX=\beta$ 的解，且满足

$$\eta_1+\eta_2=\begin{bmatrix}2\\4\\0\\8\end{bmatrix},\quad 2\eta_2+\eta_3=\begin{bmatrix}3\\0\\3\\3\end{bmatrix},\quad 3\eta_3+\eta_4=\begin{bmatrix}2\\1\\0\\1\end{bmatrix}.$$

试求方程组 $AX=\beta$ 的通解.

解 因为 $A[\frac{1}{2}(\eta_1+\eta_2)]=\frac{1}{2}(A\eta_1+A\eta_2)=\frac{1}{2}(\beta+\beta)=\beta$,

$$A[\frac{1}{3}(2\eta_2+\eta_3)]=\frac{1}{3}(2A\eta_2+A\eta_3)=\frac{1}{3}(2\beta+\beta)=\beta,$$

$$A[(3\eta_3+\eta_4)-(2\eta_2+\eta_3)]=3A\eta_3+A\eta_4-2A\eta_2-A\eta_3=3\beta+\beta-2\beta-\beta=\beta,$$

所以，$\frac{1}{2}(\eta_1+\eta_2)$，$\frac{1}{3}(2\eta_2+\eta_3)$，$(3\eta_3+\eta_4)-(2\eta_2+\eta_3)$都是 $AX=\beta$ 的解，即

$$X_1=\frac{1}{2}(\eta_1+\eta_2)=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}2\\4\\0\\8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2\\0\\4\end{bmatrix},$$

$$X_2=\frac{1}{3}(2\eta_2+\eta_3)=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}3\\0\\3\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\\1\\1\end{bmatrix},$$

$$X_3=(3\eta_3+\eta_4)-(2\eta_2+\eta_3)=\begin{bmatrix}2\\1\\0\\1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}3\\0\\3\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\1\\-3\\-2\end{bmatrix},$$

都是 $AX=\beta$ 的解，于是

$$\xi_1=X_1-X_2=\begin{bmatrix}1\\2\\0\\4\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1\\0\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\2\\-1\\3\end{bmatrix},$$

$$\xi_2=X_2-X_3=\begin{bmatrix}1\\0\\1\\1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-1\\1\\-3\\-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\-1\\4\\3\end{bmatrix},$$

都是 $AX=0$ 的解．因 $4-R(A)=2$，且 ξ_1,ξ_2 线性无关，所以 ξ_1,ξ_2 是 $AX=0$ 的一个基础解系．从而，$AX=\beta$ 的通解

$$X=X_1+k_1\xi_1+k_2\xi_2=\begin{bmatrix}1\\2\\0\\4\end{bmatrix}+k_1\begin{bmatrix}0\\2\\-1\\3\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}2\\-1\\4\\3\end{bmatrix},$$

其中 k_1,k_2 为任意常数．

例 4 已知某线性方程组(I)的通解为

$$k_1\begin{bmatrix}0\\1\\1\\0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}-1\\2\\2\\1\end{bmatrix},k_1,k_2\text{ 为任意常数}.$$

设方程组(II)为

$$\begin{cases}x_1+x_4=0\\x_1+2x_2-x_4=0,\end{cases}$$

求线性方程组(I)、(II)的公共解．

解 将(I)的通解

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=k_1\begin{bmatrix}0\\1\\1\\0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}-1\\2\\2\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-k_2\\k_1+2k_2\\k_1+2k_2\\k_2\end{bmatrix},$$

代入(II)得

$$\begin{cases}-k_2+k_2=0\\-k_2+2(k_1+2k_2)-k_2=0,\end{cases}$$

解得 $k_2=-k_1$. 于是(I)、(II)的通解为：

$$X=k_1\begin{bmatrix}0\\1\\1\\0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}-1\\2\\2\\1\end{bmatrix}=k_1\begin{bmatrix}1\\-1\\-1\\-1\end{bmatrix},k_1\text{ 为任意常数}.$$

5.2.3 线性方程组与空间中的平面、直线

下面结合几何空间中的直线与平面讨论有关的线性方程组．我们来看线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z=b_1\\a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z=b_2\end{cases}. \tag{12}$$

(12)中每一个方程表示一个平面(不妨设 a_{11},a_{12},a_{13}不全为零;a_{21},a_{22},a_{23}也不全为零). (12)的解就是这两个平面的交点,所以这两个平面之间的位置关系可以由(12)的解来刻划．(12)的系数矩阵和增广矩阵分别为

$$A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&b_1\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&b_2\end{bmatrix}.$$

A 和 B 的秩可能是 1 或者 2. 共有三种可能的情形;

情形 1:$R(A)=1,R(B)=1$. 此时 A 的两行成比例,这两个平面平行,B 的两行也成比例,所以这两个平面重合．此时方程组(12)有无穷多解．

情形 2:$R(A)=1,R(B)=2$. 此时 A 的两行成比例,这两个平面平行,B 的两行不成比例,所以这两个平面不重合．方程组(12)无解．

情形 3:$R(A)=2,R(B)=2$. 此时 A 的两行不成比例．所以这两个平面不平行,因而一定相交．方程组(12)有无穷多解．这时一般解中有一个自由未知量,比如说 z 是自由未知量,则有

$$\begin{cases}x=d_1+c_1z\\y=d_2+c_2z.\end{cases} \tag{13}$$

从几何上看,这两个不平行的平面相交成一条直线．把(13)改写一下就得到这两个平面交线的标准方程

$$\frac{x-d_1}{c_1}=\frac{y-d_2}{c_2}=\frac{z-0}{1}.$$

引入参数 t,令 $z=t$,得交线的参数方程

$$\begin{cases}x=d_1+c_1t\\y=d_2+c_2t\\z=t.\end{cases} \tag{14}$$

(12)对应的齐次线性方程组为

$$\begin{cases}a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z=0\\a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z=0.\end{cases} \tag{15}$$

(15)中的两个方程表示两个分别与(12)中两个平面平行且过原点的平面,因而它们的交线过原点且与直线(14)平行．既然与直线(14)平行,也就有相同的方向向量,再由过原点知这条交线的参数方程为

$$\begin{cases} x=c_1t \\ y=c_2t \\ z=t. \end{cases} \tag{16}$$

(14)与(16)说明了线性方程组(12)的解与它的导出组(15)的解之间的关系．即(15)的全部解与(12)的一个特解之和就是(12)的全部解．

5.3 利用矩阵的初等行变换解线性方程组

考查方程组 $AX=0$，设 A 经初等行变换化为 A_1，则 $AX=0$ 与 $A_1X=0$ 同解．事实上，因 A 经初等行变换化为 A_1，所以存在可逆阵 P 使 $PA=A_1$，设 ζ 是 $AX=0$ 的解，则 $A_1\zeta=PA\zeta=P0=0$；设 ζ 是 $A_1X=0$ 的解，则 $A\zeta=P^{-1}A_1\zeta=P^{-1}0=0$. 因此，我们经常用初等行变换将 A 化成 A_1，使方程组 $A_1X=0$ 容易求解．然后，去解方程组 $A_1X=0$.

类似地，对非齐次线性方程组 $AX=\beta$，我们经常将增广阵 $B=[A \vdots \beta]$ 用初等行变换化为 $\widetilde{B}=[\widetilde{A} \vdots \widetilde{\beta}]$，使 $\widetilde{A}X=\widetilde{\beta}$ 容易求解，然后去解方程组 $\widetilde{A}X=\widetilde{\beta}$.

下面举例说明这种解法的具体过程．

例 5 求方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3-x_4=0 \\ x_1-x_2+x_3-3x_4=0 \\ x_1+3x_2+x_3+x_4=0 \end{cases}$$

的基础解系和通解．

解 (1) 将系数矩阵 A 经初等行变换化为行阶梯形矩阵：

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-r_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_2\times(-\frac{1}{2})]{r_3+r_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}=A_1.$$

(2) 写出以 A_1 为系数阵的齐次线性方程组并移项得(选取 A_1 的一个不为零的 $R(A)$ 阶上三角子式，将以此子式中元素为系数的项留在等式左边，其余项(变号后)移到等式的右边)：

$$\begin{cases} x_1+x_2=-x_3+x_4 \\ \qquad x_2=\qquad -x_4, \end{cases}$$

取两组数 $x_3=1,x_4=0$；$x_3=0,x_4=1$，解得一个基础解系

$$\xi_1=\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\quad \xi_2=\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(3) 原方程组的通解

$$X=k_1\begin{bmatrix}-1\\0\\1\\0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}2\\-1\\0\\1\end{bmatrix},k_1,k_2\text{ 为任意常数}.$$

注意：为了简化步骤(2)的计算，有时可以在步骤(1)中将 A 化成行最简形 A_1.

例 6 求解线性方程组

$$\begin{cases}x_1+3x_2+x_3=0\\2x_1+6x_2+3x_3-2x_4=0\\-2x_1-6x_2-4x_4=0.\end{cases}$$

解

$$A=\begin{bmatrix}1&3&1&0\\2&6&3&-2\\-2&-6&0&-4\end{bmatrix}\xrightarrow[r_2-2r_1]{r_3+2r_1}\begin{bmatrix}1&3&1&0\\0&0&1&-2\\0&0&2&-4\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3-2r_2}\begin{bmatrix}1&3&1&0\\0&0&1&-2\\0&0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow{r_1-r_2}\begin{bmatrix}1&3&0&2\\0&0&1&-2\\0&0&0&0\end{bmatrix},$$

得同解方程

$$\begin{cases}x_1=-3x_2-2x_4\\x_3=2x_4.\end{cases}$$

x_2,x_4 为自由未知数，分别取 $x_2=1,x_4=0$ 和 $x_2=0,x_4=1$，解得一个基础解系

$$\xi_1=\begin{bmatrix}-3\\1\\0\\0\end{bmatrix},\quad\xi_2=\begin{bmatrix}-2\\0\\2\\1\end{bmatrix}.$$

原方程组的通解

$$X=k_1\xi_1+k_2\xi_2=k_1\begin{bmatrix}-3\\1\\0\\0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}-2\\0\\2\\1\end{bmatrix},k_1,k_2\text{ 为任意常数}.$$

例 7 求解非齐次线性方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2-2x_3-x_4=4\\3x_1-2x_2-x_3+2x_4=2\\5x_2+7x_3+3x_4=-2\\2x_1-3x_2-5x_3-x_4=4.\end{cases}$$

解 (1) 写出方程组的增广阵 $B=[A\,\vdots\,\beta]$，用初等行变换将 B 化成行阶梯形矩阵(或行最简形).

$$B=[A\ \vdots\ \beta]=\begin{bmatrix}1 & 1 & -2 & -1 & \vdots & 4\\ 3 & -2 & -1 & 2 & \vdots & 2\\ 0 & 5 & 7 & 3 & \vdots & -2\\ 2 & -3 & -5 & -1 & \vdots & 4\end{bmatrix}\xrightarrow[r_4-2r_1]{r_2-3r_1}\begin{bmatrix}1 & 1 & -2 & -1 & \vdots & 4\\ 0 & -5 & 5 & 5 & \vdots & -10\\ 0 & 5 & 7 & 3 & \vdots & -2\\ 0 & -5 & -1 & 1 & \vdots & -4\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4-r_2]{r_3+r_2}\begin{bmatrix}1 & 1 & -2 & 1 & \vdots & 4\\ 0 & -5 & 5 & 5 & \vdots & -10\\ 0 & 0 & 12 & 8 & \vdots & -12\\ 0 & 0 & -6 & -4 & \vdots & 6\end{bmatrix}\xrightarrow[(\frac{1}{4})\times r_3]{(-\frac{1}{5})\times r_2,\ r_4+\frac{1}{2}r_3}\begin{bmatrix}1 & 1 & -2 & 1 & \vdots & 4\\ 0 & 1 & -1 & -1 & \vdots & 2\\ 0 & 0 & 3 & 2 & \vdots & -3\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0\end{bmatrix}$$

$$=\widetilde{B}=[\widetilde{A}\ \vdots\ \widetilde{\beta}].$$

(2) 写出以 $\widetilde{B}$ 为增广阵的方程组，并移项（选取 $\widetilde{A}$ 的一个不为零的 $R(A)$阶上三角子式，将以此子式中元素为系数的项留在等式左边，其余项变号后移到等式右边），得

$$\begin{cases}x_1+x_2-2x_3= x_4+4\\ x_2-x_3= x_4+2\\ 3x_3=-2x_4-3.\end{cases}$$

x_4 为自由未知数，令 $x_4=k$（k 为任意常数），代入解得（将 $x_4=k$ 代入第 3 个方程得 x_3 的取值，将 x_4,x_3 代入第 2 个方程得 x_2 的取值，将 x_4,x_3,x_2 代入第 1 个方程得 x_1 的取值）

$$\begin{cases}x_1=-\frac{2}{3}k+1\\ x_2=\frac{1}{3}k+1\\ x_3=-\frac{2}{3}k-1\\ x_4=k.\end{cases}$$

于是得原方程组向量形式的通解

$$X=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\\-1\\0\end{bmatrix}+k\begin{bmatrix}-\frac{2}{3}\\ \frac{1}{3}\\ -\frac{2}{3}\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\\-1\\0\end{bmatrix}+k_1\begin{bmatrix}-2\\1\\-2\\3\end{bmatrix},$$

其中 k_1 为任意常数．

$\eta^*=(1,1,-1,0)'$ 为原方程组的一个特解．

$\xi=(-2,1,-2,3)'$ 为原方程组对应的齐次线性方程组的一个基础解系．

例 8 求解线性方程组

$$\begin{cases}2x_1+4x_2-x_3+3x_4=9\\ x_1+2x_2+x_3=6\\ x_1+2x_2+2x_3-x_4=7\\ 2x_1+4x_2+x_3+x_4=11.\end{cases}$$

解

$$B=[A \vdots \beta]=\begin{bmatrix}2&4&-1&3&\vdots&9\\1&2&1&0&\vdots&6\\1&2&2&-1&\vdots&7\\2&4&1&1&\vdots&11\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{行}}\begin{bmatrix}2&4&-1&3&\vdots&9\\1&2&1&0&\vdots&6\\0&0&1&-1&\vdots&1\\0&0&-1&1&\vdots&-1\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{行}}\begin{bmatrix}1&2&1&0&\vdots&6\\0&0&1&-1&\vdots&1\\0&0&0&0&\vdots&0\\0&0&0&0&\vdots&0\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{行}}\begin{bmatrix}1&2&0&1&\vdots&5\\0&0&1&-1&\vdots&1\\0&0&0&0&\vdots&0\\0&0&0&0&\vdots&0\end{bmatrix}.$$

即得

$$\begin{cases}x_1=-2x_2-x_4+5\\x_3=\qquad\quad x_4+1.\end{cases}$$

令 $x_2=k_1, x_4=k_2$ 得

$$\begin{cases}x_1=-2k_1-k_2+5\\x_2=\quad k_1+0k_2+0\\x_3=\quad 0k_1+k_2+1\\x_4=\quad 0k_1+k_2+0,\end{cases}$$

其向量形式的通解 $X=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=k_1\begin{bmatrix}-2\\1\\0\\0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}-1\\0\\1\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}5\\0\\1\\0\end{bmatrix}$,

其中 k_1,k_2 为任意常数.

$\eta^*=(5,0,1,0)'$ 是原方程组的一个特解,

$\xi_1=(-2,1,0,0)'$, $\xi_2=(-1,0,1,1)'$ 是原方程组对应的齐次线性方程组的一个基础解系.

例 9 设 $\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\-1\\2\end{bmatrix}$, $\alpha_2=\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}$, $\beta=\begin{bmatrix}1\\0\\a\end{bmatrix}$, 已知 β 可由 α_1,α_2 线性表示, 求数 a 及 β 被 α_1,α_2 线性表示的表达式.

解 设 x_1,x_2 使 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2=\beta$,

则

$$\begin{cases}x_1+x_2=1\\-x_1+x_2=0\\2x_1+2x_2=a.\end{cases}$$

$$B=[A \vdots \beta]=\begin{bmatrix}1&1&\vdots&1\\-1&1&\vdots&0\\2&2&\vdots&a\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{行}}\begin{bmatrix}1&1&\vdots&1\\0&2&\vdots&1\\0&0&\vdots&a-2\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{行}}\begin{bmatrix}1&0&\vdots&\frac{1}{2}\\0&1&\vdots&\frac{1}{2}\\0&0&\vdots&a-2\end{bmatrix}.$$

因 β 可由 α_1,α_2 线性表示, 所以该方程组有解. 因此, $R(A)=R(B)$, $a=2$, 方程组的解为

$$\begin{cases}x_1=\dfrac{1}{2}\\[2mm] x_2=\dfrac{1}{2},\end{cases}$$

故
$$\beta=\frac{1}{2}\alpha_1+\frac{1}{2}\alpha_2.$$

例 10 设有 3 个平面

$$\pi_1:3x+2y+z+a-1=0$$
$$\pi_2:x+4y-3z-a-1=0$$
$$\pi_3:3x-3y+(b-1)z+9=0,$$

试讨论这三个平面的相互位置关系．

解 这三个平面的法向量两两互不平行，故这三个平面互不平行．考查三个平面方程所构成的方程组的解的情况．

$$\left[\begin{array}{ccc:c}3&2&1&1-a\\1&4&-3&1+a\\3&-3&b-1&-9\end{array}\right]\longrightarrow\left[\begin{array}{ccc:c}1&-1&2&-a\\0&5&-5&1+2a\\0&0&b-7&3a-9\end{array}\right].$$

当 $b=7,a\neq3$ 时，方程组无解，三个平面没有公共交点，由于这三个平面互不平行知它们两两相交于一条直线．

当 $b=7,a=3$ 时，方程组有无穷多解：

$$X=\begin{bmatrix}-\dfrac{8}{5}\\[2mm] \dfrac{7}{5}\\[2mm] 0\end{bmatrix}+k\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix}\qquad k\text{ 为任意常数},$$

此时三平面交于一条直线：$\begin{cases}x=-\dfrac{8}{5}-k\\[2mm] y=\dfrac{7}{5}+k\\[2mm] z=k.\end{cases}$

当 $b\neq7$ 时，方程组有唯一解，三个平面交于一点．

习 题 五

1. 判断下列线性方程组是否有解：

(1) $\begin{cases}2x_1+4x_2-x_3=6\\ x_1-2x_2+x_3=4\\ 3x_1+6x_2+2x_3=-1;\end{cases}$ (2) $\begin{cases}2x_1+4x_2-x_3=6\\ x_1+2x_2+x_3=4\\ 3x_1+6x_2+2x_3=-1;\end{cases}$

(3) $\begin{cases}2x+4y-z=6\\ x+2y+z=3\\ 3x+6y+2z=9;\end{cases}$ (4) $\begin{cases}3x-2y+z=-2\\ 6x-4y+2z=-5\\ -9x+6y-3z=6.\end{cases}$

2. 设 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_m$ 都是非齐次线性方程组 $AX=\beta$ 的解向量，令

$$\eta=k_1\eta_2+k_2\eta_2+\cdots+k_m\eta_m.$$

试证：

(1) 若 $k_1+k_2+\cdots+k_m=0$,则 η 是 $AX=\beta$ 对应的齐次线性方程组 $AX=0$ 的解向量；

(2) 若 $k_1+k_2+\cdots+k_m=1$,则 η 也是 $AX=\beta$ 的解向量.

3. 设 A 为 4 阶方阵，$R(A)=3$，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 都是非齐次线性方程组 $AX=\beta$ 的解向量，其中

$$\alpha_1+\alpha_2=\begin{bmatrix}1\\9\\9\\4\end{bmatrix},\qquad \alpha_2+\alpha_3=\begin{bmatrix}1\\8\\8\\5\end{bmatrix}.$$

(1) 求 $AX=\beta$ 对应的齐次线性方程组 $AX=0$ 的一个基础解系；

(2) 求 $AX=\beta$ 的通解.

4. 已知

$$\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\0\\2\\3\end{bmatrix},\alpha_2=\begin{bmatrix}1\\1\\3\\5\end{bmatrix},\alpha_3=\begin{bmatrix}1\\-1\\a+2\\1\end{bmatrix},\alpha_4=\begin{bmatrix}1\\2\\4\\a+8\end{bmatrix},\beta=\begin{bmatrix}1\\1\\b+3\\5\end{bmatrix}.$$

(1) a,b 为何值时，β 不能表为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的线性组合；

(2) a,b 为何值时，β 可唯一地表为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的线性组合.

5. 已知齐次线性方程组

$$\begin{cases}x_1+ax_2+x_3=0\\ax_1+x_2+x_3=0\\x_1-x_2+3x_3=0\end{cases}$$

有非零解，求 a.

6. 求下列方程组的基础解系及通解：

(1) $\begin{cases}3x_1+2x_2+3x_3-2x_4=0\\2x_1+x_2+x_3-x_4=0\\2x_1+2x_2+x_3+2x_4=0;\end{cases}$ (2) $\begin{cases}x_1+x_2=0\\2x_1+3x_2+x_3+x_4=0\\2x_1+2x_2+2x_3+x_4=0;\end{cases}$

(3) $\begin{bmatrix}0&9&5&2\\1&5&3&1\\1&-4&-2&-1\\1&32&18&7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$; (4) $\begin{bmatrix}1&2&4&-3\\2&3&2&-1\\4&5&-2&3\\-1&3&26&-22\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$.

7. 求下列方程组的通解：

(1) $\begin{cases}2x_1+x_2-x_3+x_4=1\\2x_1+x_2-x_3=1\\4x_1+2x_2-2x_3-x_4=2;\end{cases}$ (2) $\begin{cases}2x_1+x_2-x_3-x_4=1\\x_1-3x_2+2x_3-4x_4=3\\x_1+4x_2-3x_3+5x_4=-2;\end{cases}$

(3) $\begin{bmatrix}2&7&3&1\\1&3&-1&1\\7&-3&-2&6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\-2\\-4\end{bmatrix}$;

(4) $\begin{bmatrix}1&3&5&-4&0\\1&3&2&-2&1\\1&-2&1&-1&-1\\1&2&1&-1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\-1\\3\\3\end{bmatrix}$.

8. 当 a_1,a_2,a_3 满足什么条件时，方程组

$$\begin{cases}x_1-x_2=a_1\\x_2-x_3=a_2\\-x_1+x_3=a_3\end{cases}$$

有解？并写出通解.

9. 当 a 等于何值时，方程组

$$\begin{cases}ax_1+x_2+x_3=1\\(a+1)x_1+(a+1)x_2+2x_3=2\\(2a+1)x_1+3x_2+(a+2)x_3=3\end{cases}$$

有唯一解；有无穷多解；无解？当有解时，把解写出来.

10. 设方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0\\\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=0,\end{cases}$$

系数矩阵 A 的秩为 $n-1$，而 A 中某元素 a_{ij} 的代数余子式 $A_{ij}\neq0$，试证 $(A_{i1},A_{i2},\cdots,A_{in})$，是该方程组的基础解系.

11. 设 η 是非齐次线性方程组 $AX=\beta(\beta\neq0)$ 的一个解向量，$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 是它对应的齐次线性方程组 $AX=0$ 的基础解系，证明

(1) $\eta,\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 线性无关；

(2) $\eta,\xi_1+\eta,\xi_2+\eta,\cdots,\xi_{n-r}+\eta$ 是 $AX=\beta$ 的 $n-r+1$ 个线性无关的解向量.

12. 设非齐次线性方程组 $AX=\beta(\beta\neq0)$ 的系数矩阵的秩为 r，$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{n-r},\eta_{n-r+1}$ 是它的 $n-r+1$ 个线性无关的解向量. 证明它的任意一个解向量都可表示为

$$X=k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_{n-r+1}\eta_{n-r+1}，其中 k_1+k_2+\cdots+k_{n-r+1}=1.$$

13. 证明与线性方程组 $AX=0$ 的基础解系等价的线性无关向量组也是 $AX=0$ 的基础解系.

14. 设 $m\times n$ 矩阵 A 的秩 $R(A)=r$，试证若 $r<n$，则存在秩为 $n-r$ 的列满秩阵 B，使

$$AB=0.$$

15. 设 A 是 $m\times n$ 矩阵，试证 A 的秩是 m 的充要条件是对任意 $m\times 1$ 矩阵 β，方程组 $AX=\beta$ 总有解．

16. 设有平面上三条直线

$$L_1: x+y+a=0$$
$$L_2: x+2y+b=0$$
$$L_3: x+3y+c=0,$$

试讨论这三条直线的相互位置关系.

第六章　特征值、特征向量及相似矩阵

在工程技术中遇到的振动和稳定性问题以及第八章中化二次型为标准形等问题中，往往要寻求满足方程 $AX=\lambda X$ 的非零列向量 X 和数 λ，其中 A 为 n 阶方阵．我们称这个非零向量 X 为 A 的特征向量，称 λ 为 A 的特征值．特征值和特征向量在实际问题中有许多应用，它们是线性代数中的两个基本概念．

本章主要研究如下几个问题：

1．方阵的特征值；

2．方阵的特征向量；

3．相似矩阵．

6.1　特征值与特征向量

6.1.1　特征值与特征向量的概念

特征值与特征向量的概念刻划了方阵的一些本质特征．这些概念不仅在理论上占有重要地位，而且在几何学、力学、控制论等方面都有着重要的应用．下面就来介绍特征值与特征向量的概念．

定义 6.1　设 A 是 n 阶方阵，如果有数 λ 和 n 维列向量 $X=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}\neq 0$，使

$$AX=\lambda X \tag{1}$$

成立，那么，称 λ 为方阵 A 一个的**特征值**，非零向量 X 称为 A 的属于特征值 λ 的**特征向量**．

例如，对任意 n 维非零列向量 X，$E_nX=1X$，所以 1 是 E_n 的特征值，任意 n 维非零列向量 X 都是 E_n 的属于特征值 1 的特征向量．

式(1)可以写成

$$(\lambda E_n-A)X=0. \tag{2}$$

这是 n 个未知数 n 个方程的齐次线性方程组，它有非零解的充要条件是

$$|\lambda E_n-A|=0, \tag{3}$$

即

$$\begin{vmatrix} \lambda-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda-a_{nn} \end{vmatrix}=0. \tag{4}$$

这是以 λ 为未知数的一元 n 次方程，称为方阵 A 的**特征方程**．其左端 $|\lambda E-A|$ 是关于 λ 的 n 次多项式，称为方阵 A 的**特征多项式**．

显然，A 的特征值就是特征方程(3)的解(根)，A 的属于特征值 λ_i 的特征向量就是齐次线性方程组

$$(\lambda_i E_n-A)X=0 \tag{5}$$

的非零解向量，称(5)的解空间 $N(\lambda_i E_n-A)$ 为 A 的关于特征值 λ_i 的**特征子空间**，特征子空间内，除零向量外，其余向量全是 A 的关于 λ_i 的特征向量．

例 1 求 $A=\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ 的特征值和特征向量．

解 A 的特征多项式为

$$|\lambda E_3-A|=\begin{vmatrix} \lambda+1 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda+1 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda+1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_1+r_2+r_3}\begin{vmatrix} \lambda+1-1-1 & -1+\lambda+1-1 & -1-1+\lambda+1 \\ -1 & \lambda+1 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda+1 \end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & \lambda+1 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda+1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[(\lambda-1)]{\substack{r_2+r_1 \\ r_3+r_1}}(\lambda-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda+2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda+2 \end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda+2)^2.$$

所以 A 的特征值为 $\lambda_1=1,\lambda_2=\lambda_3=-2$.

对 $\lambda_1=1$，解线性方程组 $(1\cdot E_3-A)X=0$，由

$$E_3-A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}\xrightarrow{\text{行}}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

得一基础解系 $\xi_1=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. 所以 A 的属于特征值 $\lambda_1=1$ 的所有特征向量为

$$X=k\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}，\text{其中 } k \text{ 为任意非零常数}.$$

对 $\lambda_2=\lambda_3=-2$，解线性方程组 $(-2E_3-A)X=0$，由

$$-2E_3-A=\begin{bmatrix}-1&-1&-1\\-1&-1&-1\\-1&-1&-1\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{行}}\begin{bmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},$$

得一个基础解系

$$\xi_2=\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix},\quad \xi_3=\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}.$$

所以

$$X=k_1\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$$

是 A 的对应于 $\lambda_2=\lambda_3=-2$ 的全部特征向量，其中 k_1,k_2 为不同时为零的任意常数．

6.1.2 特征值与特征向量的性质

特征方程(4)在复数范围内恒有解，解的个数等于特征方程的次数(重根按重数计算)，因此，n 阶方阵 A 在复数域内有 n 个特征值．

n 阶方阵 A 的特征值满足：

(1) 矩阵 A 的 n 个特征值之和等于 A 的 n 个对角线元素之和，即

$$\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}.$$

(2) 矩阵 A 的 n 个特征值的乘积等于 A 的行列式的值，即

$$\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n=|A|.$$

证 利用行列式定义将 $|\lambda E-A|$ 展开，其中一项是主对角线元素的乘积

$$(\lambda-a_{11})(\lambda-a_{22})\cdots(\lambda-a_{nn}).$$

展开式中其余各项至多含 $n-2$ 个主对角线元素，这些项中 λ 的次数最多是 $n-2$，因此特征多项式中含 λ 的 n 次幂与 $n-1$ 次幂的项只能在上述主对角线元素的乘积中出现，它们是

$$\lambda^n,(-1)(a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn})\lambda^{n-1}.$$

在特征多项式 $|\lambda E-A|$ 中令 $\lambda=0$，得常数项 $|-A|=(-1)^n|A|$．因此，如果只写出特征多项式的前两项与常数项，就有特征方程

$$\lambda^n+(-1)(a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn})\lambda^{n-1}+\cdots+(-1)^n|A|=0.$$

由根与系数的关系可知，A 的 n 个特征值之和为 $a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$，即

$$\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}.$$

而 A 的 n 个特征值之积为 $|A|$，即

$$\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n=|A|.\qquad \square$$

称 A 的主对角线元素之和 $a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$ 为 A 的**迹**，记为 $\mathrm{tr}(A)$．所以 A 的 n 个特征值之和等于 A 的迹 $\mathrm{tr}(A)$；A 的 n 个特征值之积等于 A 的行列式 $|A|$．

容易看出,零是 A 的一个特征值当且仅当 $|A|=0$.

例 2 设 n 阶方阵 A 可逆,λ 是 A 的特征值,证明 λ^{-1} 是 A^{-1} 的特征值.

证 因 A 可逆,所以 $|A|\neq 0$,故 $\lambda\neq 0$,由 λ 是 A 的特征值,故有 n 维列向量 $X\neq 0$ 使 $AX=\lambda X$. 于是

$$\frac{1}{\lambda}AX=X.$$

用 A^{-1} 同时左乘上式的两边得

$$A^{-1}X=\frac{1}{\lambda}X,$$

由 $X\neq 0$ 知,λ^{-1} 是 A^{-1} 的特征值. □

例 3 设 λ 是 n 阶方阵 A 的特征值,证明 λ^2 是 A^2 的特征值.

证 因 λ 是 A 的特征值,故有 n 维列向量 $X\neq 0$ 使 $AX=\lambda X$,于是

$$A^2X=A(AX)=A(\lambda X)=\lambda(AX)=\lambda^2X.$$

由 $X\neq 0$ 知 λ^2 是 A^2 的特征值. □

设 $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_mx^m$ 是关于 x 的多项式,A 是 n 阶方阵,规定

$$f(A)=a_0E_n+a_1A+\cdots+a_mA^m.$$

与例 3 类似,可以证明,若 λ 是 A 的特征值,则 $f(\lambda)$ 是 $f(A)$ 的特征值,其中 $f(\lambda)=a_0+a_1\lambda+\cdots+a_m\lambda^m$.

定理 6.1 设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$ 是 n 阶方阵 A 的 m 个特征值,$X_1,X_2,\cdots,X_m$ 依次是与之对应的特征向量. 如果 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$ 互不相等,则 $X_1,X_2,\cdots,X_m$ 线性无关.

证 对特征值的个数 m 用数学归纳法.

(1) $m=1$ 时,由 $X_1\neq 0$ 知命题成立.

(2) 假设当 $m=s$ 时命题成立. 当 $m=s+1$ 时,设有常数 $k_1,k_2,\cdots,k_s,k_{s+1}$ 使

$$k_1X_1+k_2X_2+\cdots+k_sX_s+k_{s+1}X_{s+1}=0. \tag{6}$$

用 A 左乘上式两边得

$$k_1\lambda_1X_1+k_2\lambda_2X_2+\cdots+k_s\lambda_sX_s+k_{s+1}\lambda_{s+1}X_{s+1}=0. \tag{7}$$

用 λ_{s+1} 乘(6)两边得

$$k_1\lambda_{s+1}X_1+k_2\lambda_{s+1}X_2+\cdots+k_s\lambda_{s+1}X_s+k_{s+1}\lambda_{s+1}X_{s+1}=0. \tag{8}$$

(7)-(8)得

$$k_1(\lambda_1-\lambda_{s+1})X_1+k_2(\lambda_2-\lambda_{s+1})X_2+\cdots+k_s(\lambda_s-\lambda_{s+1})X_s=0.$$

由归纳假设 $X_1,X_2,\cdots,X_s$ 线性无关,又 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_{s+1}$ 互不相同,知 $k_1=k_2=\cdots=k_s=0$. 于是由式(6)知 $k_{s+1}=0$. 故 $X_1,X_2,\cdots,X_{s+1}$ 线性无关. □

6.1.3 实对称阵的特征值与特征向量

实对称阵有下面三个重要性质:

(1) 实对称阵的特征值都是实数;

(2) 实对称阵的对应于不同特征值的实特征向量必正交;

(3) 对应于实对称阵 A 的 r_i 重特征值 λ_i，一定有 r_i 个线性无关的实特征向量．就是说方程组

$$(\lambda_i E_n - A)X = 0 \tag{9}$$

的每个基础解系恰好含有 r_i 个向量．

由上述性质(1)可知，方程组(9)的系数全是实数，所以它有实解向量，故 A 必有实特征向量．

我们只给出(2)的证明．

证 设 λ_1,λ_2 是实对称阵 A 的两个特征值，X_1,X_2 是对应的实特征向量，且 $\lambda_1 \neq \lambda_2$，则 $AX_1=\lambda_1 X_1, AX_2=\lambda_2 X_2$，于是

$$\lambda_1 X'_1 X_2 = (\lambda_1 X_1)' X_2 = (AX_1)' X_2 = X'_1 A' X_2 = X'_1(AX_2) = X'_1(\lambda_2 X_2) = \lambda_2 X'_1 X_2,$$

故

$$(\lambda_1 - \lambda_2) X'_1 X_2 = 0,$$

而 $\lambda_1 \neq \lambda_2$，所以 $X'_1 X_2 = (X_1, X_2) = 0$，即 $X_1 \perp X_2$. □

注：(3)的证明超出了本书的范围．

例 4 设 A 是 3 阶实对称阵，A 的特征值为 1,2,2，$X_1=(1,1,0)'$ 与 $X_2=(0,1,1)'$ 都是 A 的与特征值 2 对应的特征向量．求 A 的属于特征值 1 的实单位特征向量．

解 设 $X=(x_1,x_2,x_3)'$ 为 A 的属于特征值 1 的实单位特征向量．由 A 为实对称阵知 $(X_1,X)=0,(X_2,X)=0$，又 $|X|=1$，于是

$$\begin{cases} x_1+x_2 = 0 \\ x_2+x_3=0 \\ x_1^2+x_2^2+x_3^2=1 \end{cases},$$

解之得

$$X=\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix} \text{或} X=-\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix}.$$

6.2 相似矩阵

6.2.1 相似矩阵的概念

定义 6.2 设 A,B 都是 n 阶方阵，若存在可逆阵 T，使

$$B=T^{-1}AT,$$

则称 A 与 B **相似**，称从 A 到 B 的这种变换为**相似变换**，称这个 T 为**相似变换矩阵**．

若 A 与一个对角阵 D 相似，则称 A 可以**相似对角化**．

定理 6.2 若 A 与 B 相似，则 A 与 B 的特征多项式相同．

证 因 A 与 B 相似，所以存在可逆阵 T，使

$$B=T^{-1}AT.$$

于是

$$|\lambda E-B|=|T^{-1}(\lambda E)T-T^{-1}AT|=|T^{-1}(\lambda E-A)T|$$

$$=|T^{-1}||\lambda E-A||T|=|\lambda E-A|. \quad \Box$$

由定理 6.2 容易得到:

(1) 若 A 与 B 相似,则 A 与 B 的特征值相同.反之未必成立,即两个矩阵特征值相同,它们不一定相似.

(2) 若 A 与 B 相似,则 $\mathrm{tr}(A)=\mathrm{tr}(B)$,且 $|A|=|B|$.

请读者给出(1)、(2)的证明.

推论 若 n 阶方阵 A 与对角阵 $D=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix}$ 相似,则 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 A 的 n 个特征值.

证 因 A 与 D 相似,所以

$$|\lambda E_n-A|=|\lambda E_n-D|=\begin{vmatrix}\lambda-\lambda_1 & & & \\ & \lambda-\lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda-\lambda_n\end{vmatrix}=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_n),$$

因此 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 A 的 n 个特征值. $\Box$

6.2.2 方阵相似对角化的条件及方法

定理 6.3 n 阶方阵 A 与对角阵相似的充要条件是 A 有 n 个线性无关的特征向量.并且,$T^{-1}AT=D$ 为对角阵的充要条件是,T 的 n 个列向量是 A 的 n 个线性无关的特征向量,且这 n 个特征向量对应的特征值依次为对角阵 D 的主对角线上的元素.

证 设有 n 阶可逆阵 $T=(T_1,T_2,\cdots,T_n)$,使

$$T^{-1}AT=D=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix},$$

则 $AT=TD$,由分块阵乘法得

$$AT=A(T_1,T_2,\cdots,T_n)=(AT_1,AT_2,\cdots,AT_n),$$

$$TD=(T_1,T_2,\cdots,T_n)\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix}=(\lambda_1T_1,\lambda_2T_2,\cdots,\lambda_nT_n).$$

于是

$$AT_i=\lambda_iT_i,(i=1,2,\cdots,n). \tag{10}$$

由 T 可逆,知 $T_i\neq 0,(i=1,2,\cdots,n)$,且 $T_1,T_2,\cdots,T_n$ 线性无关.故由式(10)可知 $T_1,T_2,\cdots,T_n$ 是 A 的 n 个线性无关的特征向量,λ_i 是与 T_i 对应的特征值.

反之,假设 A 有 n 个线性无关的特征向量 $T_1,T_2,\cdots,T_n$,而 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 依次为与它们对应的特征值,令

$$T=(T_1,T_2,\cdots,T_n),\quad D=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix},$$

则由 $AT_i=\lambda_iT_i(i=1,2,\cdots,n)$,得

$$\begin{aligned}AT&=A(T_1,T_2,\cdots,T_n)=(AT_1,AT_2,\cdots,AT_n)\\&=(\lambda_1T_1,\lambda_2T_2,\cdots,\lambda_nT_n)\\&=(T_1,T_2,\cdots,T_n)\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix}=TD.\end{aligned}$$

因 n 个 n 维向量 $T_1,T_2,\cdots,T_n$ 线性无关,所以 $T=(T_1,T_2,\cdots,T_n)$ 可逆,故

$$T^{-1}AT=D=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix}. \qquad \square$$

特别地,由定理 6.1 与 6.3 可知,当 n 阶方阵 A 的 n 个特征值互不相等时,A 必与对角阵相似.

例 5 求可逆阵 T,使 $T^{-1}AT$ 为对角阵,其中

$$A=\begin{bmatrix}2 & 3\\0 & 1\end{bmatrix}.$$

解 (1)求特征值,由

$$|\lambda E_n-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & -3\\0 & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda-1),$$

知 A 的特征值是 1,2.

(2)求 A 的两个特征向量构成的线性无关向量组.

对 $\lambda_1=1$,解 $(1\cdot E_2-A)X=0$,得

$$T_1=\begin{bmatrix}-3\\1\end{bmatrix}.$$

对 $\lambda_2=2$,解 $(2\cdot E_2-A)X=0$,得

$$T_2=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}.$$

显然,T_1,T_2 线性无关.

(3) 令 $T=(T_1,T_2)=\begin{bmatrix}-3 & 1\\1 & 0\end{bmatrix},D=\begin{bmatrix}\lambda_1 & \\ & \lambda_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 2\end{bmatrix}$,

则

$$T^{-1}AT=D=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 2\end{bmatrix}.$$

例 6 设 3 阶方阵 A 的特征值是 $1,-1,-1$,

$$T_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\quad T_2=\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix},\quad T_3=\begin{bmatrix}3\\2\\-1\end{bmatrix}$$

依次为对应的特征向量，求 A 与 A^9.

解 令 $T=(T_1,T_2,T_3)=\begin{bmatrix}1&0&3\\0&1&2\\0&-1&-1\end{bmatrix}$, $D=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$，则 $AT=TD$. 由 $|T|=1\neq0$，知 T 可逆，于是

$$A=TDT^{-1}. \tag{11}$$

而
$$T^{-1}=\frac{1}{|T|}T^*=\begin{bmatrix}1&-3&-3\\0&-1&-2\\0&1&1\end{bmatrix},$$

故
$$A=\begin{bmatrix}1&0&3\\0&1&2\\0&-1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-3&-3\\0&-1&-2\\0&1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-6&-6\\0&-1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}.$$

由式(11)得 $A^9=(TDT^{-1})^9=TDT^{-1}TDT^{-1}\cdots TDT^{-1}=TD^9T^{-1}$

$$=T\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}^9T^{-1}=T\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}T^{-1}=TDT^{-1}=A=\begin{bmatrix}1&-6&-6\\0&-1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}.$$

6.2.3 实对称矩阵的正交相似对角化

实对称矩阵 A 不仅可以相似对角化，而且还可以要求相似变换矩阵是个正交阵.

定理 6.4 设 A 为 n 阶实对称矩阵，则存在 n 阶正交阵 P，使

$$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}\lambda_1&&&0\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\0&&&\lambda_n\end{bmatrix},$$

其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 为 A 的 n 个特征值.

证 设 A 的所有互不相等的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$，它们的重数依次是 $r_1,r_2,\cdots,r_s(r_1+r_2+\cdots+r_s=n)$. 由 6.1 节中实对称矩阵的特征值的性质(1)和性质(3)知，对应于特征值 $\lambda_i(i=1,2,\cdots,s)$恰有 r_i 个线性无关的实特征向量，把它们标准正交化，即得 r_i 个标准正交的特征向量 $P_{i1},P_{i2},\cdots,P_{ir_i}$，由 $r_1+r_2+\cdots+r_s=n$ 知，这样的特征向量共有 n 个：

$$P_{11},P_{12},\cdots,P_{1r_1},\cdots,P_{s1},P_{s2},\cdots,P_{sr_s}. \tag{12}$$

由 6.1 节中实对称阵的特征值的性质(2)知，向量组(12)是标准正交向量组，由定理 4.7，以(12)中向量为列构成的矩阵 P 是个正交阵，并且由定理 6.3，得

$$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{bmatrix}.\quad\Box$$

例 7 设 $A=\begin{bmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{bmatrix}$，求一个正交阵 P，使 $P^{-1}AP$ 为对角阵．

解 (1)求特征值

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-2&-2\\-2&\lambda-1&-2\\-2&-2&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-5)(\lambda+1)^2,$$

A 的特征值为$-1,-1,5$.

(2) 求 3 个标准正交的特征向量

对 $\lambda_1=\lambda_2=-1$，由$\in|E-A|x=0$ 得

$$\begin{bmatrix}-2&-2&-2\\-2&-2&-2\\-2&-2&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

解得

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=k_1\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}.$$

取

$$T_1=\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix},\quad T_2=\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}.$$

将 T_1,T_2 用施密特正交化方法正交化，得

$$\beta_1=\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix},\qquad \beta_2=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\1\end{bmatrix}.$$

再将 β_1,β_2 标准化得

$$P_1=\begin{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\end{bmatrix},\qquad P_2=\begin{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt{6}}\\-\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{2}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}.$$

对 $\lambda_3=5$，由$(E_3-A)x=0$ 得

$$\begin{bmatrix}4&-2&-2\\-2&4&-2\\-2&-2&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix},$$

解得 $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=k_1\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$. 取 $T_3=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$ 将 T_3 标准化(因只含一个向量,不必正交化)得

$$P_3=\left[\frac{1}{\sqrt{3}}\quad\frac{1}{\sqrt{3}}\quad\frac{1}{\sqrt{3}}\right]'.$$

(3) 令 $P=(P_1,P_2,P_3)$,得正交阵

$$P=\begin{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix},$$

令 $D=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&5\end{bmatrix}$, 则 $P^{-1}AP=D=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&5\end{bmatrix}$.

例 8 设 n 阶实对称阵 A 的特征值都大于零,试证 $|E+A|>1$.

证明 因 A 是实对称矩阵,故存在正交阵 P,使

$$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{bmatrix},$$

于是

$$A=P\begin{bmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{bmatrix}P^{-1},$$

故 $$|E+A|=\left|E+P\begin{bmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{bmatrix}P^{-1}\right|=|P|\left|E+\begin{bmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{bmatrix}\right||P^{-1}|$$

$$=\begin{vmatrix}\lambda_1+1&&&\\&\lambda_2+1&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n+1\end{vmatrix}=(\lambda_1+1)(\lambda_2+1)\cdots(\lambda_n+1).$$

因 A 的特征值全大于零,所以 $\lambda_i+1>1,(i=1,2,\cdots,n)$,故

$$|E+A|>1.$$ □

6.3 应用举例

例 9 假定一对兔子出生后一个月开始有繁殖能力,有繁殖能力的每对兔子每月产生一对后代. 设一月初有一对新生的兔子,问第四年的一月初有多少对兔子?

解 通过分析,第1、2、3、…月初的兔子的对数构成一数列:

$$1,1,2,3,5,8,13,21,34,\cdots$$

记 x_i 为第 i 月初的兔子对数,则

$$x_1=1,x_2=1,x_i=x_{i-1}+x_{i-2},\quad i=3,4,5,\cdots$$

第四年的一月初是第37个月初,故我们需要求出 x_{37},下面用矩阵方法求 x_{37}.
记

$$\alpha_k=\begin{bmatrix}x_{k+1}\\x_k\end{bmatrix},\quad k=1,2,3,\cdots,$$

由

$$\begin{cases}x_{k+2}=x_{k+1}+x_k\\x_{k+1}=x_{k+1},\end{cases}$$

得

$$\alpha_{k+1}=\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix}\alpha_k\qquad k=1,2,\cdots.$$

记

$$A=\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix},$$

则

$$\alpha_{37}=A^{36}\alpha_1.$$

经计算可得 $\frac{1+\sqrt{5}}{2},\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ 为 A 的特征值.

$$\xi_1=\begin{bmatrix}\frac{1+\sqrt{5}}{2}\\1\end{bmatrix},\xi_2=\begin{bmatrix}\frac{1-\sqrt{5}}{2}\\1\end{bmatrix},$$

分别是 A 的对应于特征值 $\frac{1+\sqrt{5}}{2},\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ 的特征向量.
解

$$\alpha_1=k_1\xi_1+k_2\xi_2$$

得

$$\alpha_1=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}\xi_1-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\xi_2\right].$$

于是

$$\begin{aligned}\alpha_{37}&=A^{36}\left[\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}\xi_1-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\xi_2\right]\right]\\&=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]^{37}\xi_1-\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right]^{37}\xi_2\\&=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]^{38}-\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right]^{38}\\\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]^{37}-\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right]^{37}\end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$x_{37}=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]^{37}-\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right]^{37}$$

从而,第四年的一月初有$\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]^{37}-\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right]^{37}$对兔(约 2415 万对).

例 10 设数列$\{x_n\}$,$\{y_n\}$满足

$$x_n=4x_{n-1}-3y_{n-1},\quad y_n=6x_{n-1}-5y_{n-1}.\qquad n=1,2,\cdots$$

$$x_0=2,\quad y_0=3,$$

求 x_{100},y_{100}.

解 记 $\alpha_n=\begin{bmatrix}x_n\\y_n\end{bmatrix}$,$A=\begin{bmatrix}4&-3\\6&-5\end{bmatrix}$.

由

$$\begin{cases}x_n=4x_{n-1}-3y_{n-1}\\y_n=6x_{n-1}-5y_{n-1}\end{cases}$$

得

$$\alpha_n=A\alpha_{n-1},\quad n=1,2,3,\cdots$$

$$\alpha_{100}=A^{100}\alpha_0=A^{100}\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}.$$

经计算知 A 的特征值为 1,-2,并且

$$\xi_1=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\xi_2=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}.$$

是 A 的属于特征值 1,-2 的特征向量.记

$$T=(\xi_1\ \xi_2)=\begin{bmatrix}1&1\\1&2\end{bmatrix},$$

则

$$A=T\begin{bmatrix}1&\\&-2\end{bmatrix}T^{-1}.$$

$$A^{100}=T\begin{bmatrix}1&\\&-2\end{bmatrix}^{100}T^{-1}=\begin{bmatrix}2-2^{100}&2^{100}-1\\2-2^{101}&2^{101}-1\end{bmatrix}.$$

$$\alpha_{100}=A^{100}\alpha_0=\begin{bmatrix}2-2^{100}&2^{100}-1\\2-2^{101}&2^{101}-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+2^{100}\\1+2^{101}\end{bmatrix}.$$

$$x_{100}=1+2^{100},y_{100}=1+2^{101}.$$

例 11 假定某省人口总数保持不变,每年有 20%的农村人口流入城镇,有 10%的城镇人口流入农村.试问该省的城镇人口与农村人口的分布最终是否会趋于一个“稳定状态”.

解 设该省人口总数为 m,从今年开始,第 i 年该省的城镇人口数与农村人口数分别为 x_i,y_i.依题意有

$$x_i=90\%x_{i-1}+20\%y_{i-1},$$

$$y_i=10\%x_{i-1}+80\%y_{i-1},$$

记

$$\alpha_i=\begin{bmatrix}x_i\\y_i\end{bmatrix},\quad i=1,2,\cdots,$$

$$A=\begin{bmatrix}0.9 & 0.2\\0.1 & 0.8\end{bmatrix},$$

则

$$\alpha_{i+1}=A^i\alpha_1.$$

经计算可知 A 的特征值为 1,0.7,并且

$$\xi_1=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix},\xi_2=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix},$$

分别是 A 的属于特征值 1,0.7 的特征向量. 解关于 k_1,k_2 的方程

$$\alpha_1=k_1\xi_1+k_2\xi_2,\text{其中 }\alpha_1=\begin{bmatrix}x_1\\y_1\end{bmatrix},$$

得

$$\begin{aligned}\alpha_1&=\frac{1}{3}(x_1+y_1)\xi_1+\frac{1}{3}(x_1-2y_1)\xi_2\\&=\frac{1}{3}m\xi_1+\frac{1}{3}(x_1-2y_1)\xi_2.\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}\alpha_{i+1}&=A^i\alpha_1\\&=\frac{1}{3}mA^i\xi_1+\frac{1}{3}(x_1-2y_1)A^i\xi_2\\&=\frac{1}{3}m\xi_1+\frac{1}{3}(x_1-2y_1)(0.7)^i\xi_2,\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix}x_{i+1}\\y_{i+1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{2}{3}m+\frac{1}{3}(x_1-2y_1)(0.7)^i\\\frac{1}{3}m-\frac{1}{3}(x_1-2y_1)(0.7)^i\end{bmatrix}.$$

$$\lim_{i\to\infty}x_{i+1}=\frac{2}{3}m,$$

$$\lim_{i\to\infty}y_{i+1}=\frac{1}{3}m.$$

最终该省的城镇人口与农村人口的分布会趋于一个“稳定状态”,大约有$\frac{2}{3}$城镇人口,$\frac{1}{3}$农村人口.

习 题 六

1. 设

$$A=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\0 & 2 & 3\\0 & 0 & 2\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}1 & -1\\2 & 4\end{bmatrix},$$

求 A,B 的特征值及特征向量．

2. 设

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 2\\ 1 & -2 & 1\end{bmatrix},$$

求 A 的特征值及属于实特征值的一个特征向量．

3. 设 A,B 都是 n 阶方阵，且 $|A|\neq 0$，证明 AB 与 BA 相似．

4. 求一个正交相似变换矩阵，将下列实对称矩阵化为对角阵：

(1) $\begin{bmatrix}2 & -2 & 0\\ -2 & 1 & -2\\ 0 & -2 & 0\end{bmatrix}$； (2) $\begin{bmatrix}2 & 2 & -2\\ 2 & 5 & -4\\ -2 & -4 & 5\end{bmatrix}$.

5. 设 λ 是 n 阶方阵 A 的特征值，试证：$\lambda^2+\lambda+1$ 是 A^2+A+E 的特征值．

6. 设 A 是 n 阶方阵，且存在自然数 m，使 $A^m=0$，试证 A 的特征值只能是 0.

7. 设 A 可逆，λ 是 A 的一个特征值，试证 $\frac{|A|}{\lambda}$ 是 A^* 的一个特征值．

8. 设 λ,μ 是矩阵 A 的两个不同的特征值，X,Y 分别是 A 的属于特征值 λ,μ 的特征向量，试证：X,Y 线性无关，且 $X+Y$ 不是 A 的特征向量．

9. 设方阵 $A=\begin{bmatrix}-1 & 2 & 4\\ 2 & x & 2\\ 4 & 2 & -1\end{bmatrix}$ 与 $D=\begin{bmatrix}5 & & \\ & y & \\ & & -5\end{bmatrix}$ 相似，求 x,y.

10. 设 3 阶方阵 A 的特征值为 $0,1,-1$，

$$P_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\quad P_2=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\quad P_3=\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix},$$

依次为对应的特征向量，求 A 及 A^{2n}.

11. 设四阶实对称阵 A 的特征值为 $-1,-1,1,1$. 向量

$$\xi_1=(1,1,0,2)',\xi_2=(1,-1,2,0)'$$

是 A 的属于特征值 -1 的特征向量求 A 及 A^{2n}.

12. 已知 A 与 B 相似，其中

$$B=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix},$$

求 (1) A 的特征多项式；

(2) A 的特征值；

(3) $|A|$；

(4) $\mathrm{tr}(A)$；

(5) $R(A)$.

13. 已知三阶矩阵 A 的特征值为 $1,-1,2$，设矩阵 $B=A^3-5A^2$，试求：

(1) 矩阵 B 的特征值及与 B 相似的对角阵，并说明理由；

(2) $A^{-1}+A^*$ 的特征值；

(3) 行列式 $|B|$ 及 $|A^{-1}+A^*|$.

14. 设 n 阶方阵 A 的每一行元素之和都等于数 a，试证 a 是 A 的一个特征值，并且 $X=(1,1,\cdots,1)'$ 是 A 的对应于 a 的一个特征向量.

15. 设数 $\{x_n\}$ 满足规律

$$x_{n+2}=x_{n+1}+x_n,\quad x_0=1,x_1=3,$$

求 x_n 及 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}$.

16. 某市现有总人口 810 万，调查表明，每年有 40% 的旧城区人口搬到新区居住，同时又有 20% 的新区人口迁回到旧城区居住，问按这样的规模进行城区改造，10 年后旧城区大约有多少万居民？

第七章　线性空间与线性变换

为了进一步拓宽线性代数的应用范围，本章将 n 维向量推广成更一般的向量，建立一般的线性空间理论．同时介绍一些线性变换的知识．本章主要讨论：

1. 线性空间的概念；
2. 线性空间的基、维数与坐标；
3. 坐标变换；
4. 线性变换的一般定义及性质；
5. 线性变换的矩阵表示．

本章在一般的数域 F 上讨论问题．

7.1　线性空间的概念

7.1.1　线性空间的定义

我们已经知道，n 维向量空间具有关于向量加法及数乘的封闭性，并有八条基本运算规律（见第四章 4.1 节）．有趣的是，这并不是 n 维向量空间独有的性质．例如，$m\times n$ 实矩阵的全体构成的集合关于矩阵的加法及数乘封闭，也具有相同的八条基本运算规律，还有许多各不相同的集合，在适当定义了各自的"加法"及"数乘"后，也都具有这些性质．这就启发人们将 n 维向量空间的概念加以抽象和推广．

定义 7.1　设 V 是一个非空集合，F 是一个数域，如果对任意两个元素 $\alpha,\beta\in V$，总有唯一的一个元素 $\gamma\in V$ 与之对应，称 γ 为 α 与 β 的和，记作 $\gamma=\alpha+\beta$；又对于任一数 $k\in F$ 及任一元素 $\alpha\in V$，有唯一的一个 $\delta\in V$ 与之对应，称为 k 与 α 的积，记作 $\delta=k\alpha$；并且这两种运算满足以下八条规律（设 $\alpha,\beta,\gamma\in V;k,l\in F$）：

(1)　$\alpha+\beta=\beta+\alpha$；

(2)　$(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$；

(3)　在 V 中存在零元素 0，对任意 $\alpha\in V$，都有 $\alpha+0=\alpha$；

(4)　对任意 $\alpha\in V$，都有 α 的负元素 $\beta\in V$，使 $\alpha+\beta=0$；

(5)　$1\cdot\alpha=\alpha$；

(6)　$k(l\alpha)=(kl)\alpha$；

(7)　$(k+l)\alpha=k\alpha+l\alpha$；

(8)　$k(\alpha+\beta)=k\alpha+k\beta$.

那么，就称 V 为数域 F 上的**线性空间**．

称满足上述八条规律的加法与数乘为**线性运算**．

注意： 在定义 7.1 中，非空集合 V 中的元素是什么，加法和数乘具体如何进行都没有规定，而只叙述了它们应该满足的性质．正是由于这个原因，线性空间的内涵十分丰富，人们说到某个非空集合是某个数域上的线性空间时，应该说明这个集合的元素及加法、数乘的具体定义．验证 V 是否为线性空间时，不仅要验证在 V 上是否定义了加法和数乘，还要验证这种加法和数乘是否满足八条算律，只要定义中某一点不满足，V 就不是线性空间．

由于线性空间与 n 维向量空间有许多本质上相同的性质，因此人们常把线性空间称为"**向量空间**"，线性空间 V 中的元素不论本来的性质如何，统称为**向量**．

实数域 R 上的线性空间称为**实线性空间**，实线性空间中的向量称为**实向量**．

我们已经指出，n 维有序实数组的全体 R^n 关于 n 维实向量的通常的加法与数乘满足定义 7.1 中的八条性质，所以 R^n 是实线性空间．

显然，R^n 只是线性空间的一个具体例子．因此，向量不一定是有序实数组，线性空间的线性运算也未必是有序实数组的加法及数乘．

例 1 所有 $m\times n$ 实矩阵的全体构成的集合 $R^{m\times n}$，关于矩阵的加法与数乘是实线性空间．

例 2 次数不超过 n 的实多项式的全体以及零多项式 0 构成的集合（n 为固定的整数）：

$$P[x]_n=\{p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0 \mid a_n,a_{n-1},\cdots,a_1,a_0\in R\},$$

关于通常多项式的加法及实数与多项式的乘法是实线性空间．

例 3 n 次实多项式的全体（n 为固定的正整数）

$$Q[x]_n=\{p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0 \mid a_n,a_{n-1},\cdots,a_1,a_0\in R,\quad a_n\neq 0\},$$

关于通常多项式的加法及数与多项式的乘法不是线性空间，事实上，x^n，$-x^n+1$ 都在 $Q[x]_n$ 中，但 $x^n+(-x^n+1)=1\overline{\in}Q[x]_n$，即 $Q[x]_n$ 关于加法不封闭．

例 4 定义在区间 $[a,b]$ 上的连续函数的全体，关于函数的加法及实数与函数的乘法是实线性空间．

设 V 是数域 F 上的线性空间，除了定义 7.1 中的(1)～(8)外，还有性质：

(1) V 中的零元素是唯一的；

(2) V 中每个元素的负元素是唯一的，记 α 的负元素为 $-\alpha$；

(3) $0\alpha=0,(-1)\alpha=-\alpha,k0=0$；

(4) $k\alpha=0\Rightarrow k=0$ 或 $\alpha=0$.

证 (1) 设 $0_1,0_2$ 都是 V 中的零元素，即对任何 $\alpha\in V$，有 $\alpha+0_1=\alpha,\alpha+0_2=\alpha$. 于是特别有

$$0_2+0_1=0_2,\qquad 0_1+0_2=0_1.$$

所以

$$0_1=0_1+0_2=0_2+0_1=0_2.$$

(2)设 α 有两个负元素 β,γ，即 $\alpha+\beta=0,\alpha+\gamma=0$. 于是

$$\beta=\beta+0=\beta+(\alpha+\gamma)=(\alpha+\beta)+\gamma=0+\gamma=\gamma.$$

(3)我们只证 $0\alpha=0$,(注意:等号两边的"0"代表不同的对象)因

$$\alpha+0\alpha=1\alpha+0\alpha=(1+0)\alpha=1\alpha=\alpha,$$

两边加上 α 的负元素,即得 $0\alpha=0$.

其余的性质,请读者自己证明.

7.1.2 子空间

定义 7.2 设 V 是数域 F 上的线性空间,L 是 V 的一个非空子集,如果 L 对于 V 上所定义的加法和数乘也构成 F 上的线性空间,则称 L 是 V 的一个子空间.

线性空间 V 的非空子集 L 满足什么条件才能构成子空间呢?因 L 是 V 的子集,V 中的运算对于 L 来说,规律(1)、(2)、(5)、(6)、(7)、(8)显然是满足的.因此,只要 L 对两种运算封闭,且满足规律(3)和(4)即可.但是,若 L 对运算封闭,自然满足(3)和(4)(事实上,取 $\alpha\in V$,则 $0=0\alpha\in V,-\alpha=(-1)\cdot\alpha\in V$).因此,我们有:

定理 7.1 F 上线性空间 V 的非空子集 L 构成 V 的子空间的充要条件是:L 对于 V 中的线性运算封闭,即

(1)对任意 $\alpha,\beta\in L$,都有 $\alpha+\beta\in L$;

(2)对任意 $\alpha\in L$,任意 $k\in F$ 都有 $k\alpha\in L$.

例 5 线性空间 V 的零向量 0 构成的集合{0}是 V 的子空间.V 也是 V 的子空间.

与第四章中例 8 类似,有下述例 6.

例 6 设 V 是数域 F 上的线性空间,$\alpha,\beta\in V$,集合

$$L=\{\gamma\mid\gamma=k\alpha+l\beta,k,l\in F\}$$

是 V 的一个子空间,这是由于,若 $\gamma_1=k_1\alpha+l_1\beta,\gamma_2=k_2\alpha+l_2\beta,k_1,l_1,k_2,l_2\in F$,则有

$$\gamma_1+\gamma_2=(k_1+k_2)\alpha+(l_1+l_2)\beta\in L.$$

$$k\gamma_1=kk_1\alpha+kl_1\beta\in L,k\in F.$$

称这个线性空间为由向量 α,β 所**生成的**(V 的)**子空间**.

一般地,由 V 中向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 所生成的线性子空间为

$$L=\{\gamma\mid\gamma=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m,k_1,k_2,\cdots,k_m\in F\}.$$

7.2 线性空间的基、维数与坐标

7.2.1 线性空间的基、维数与坐标

在第四章中,我们曾介绍了线性组合、线性相关与线性无关,极大无关组和向量组的秩等概念,以及有关线性运算的若干性质.这些概念和性质对于一般线性空间中的向量仍然适用,我们将直接引用这些概念和性质.

定义 7.3 在线性空间 V 中,如果存在 n 个元素 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$,满足

(1) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关;

(2) V 中任意元素 α,都使 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\alpha$ 线性相关.

那么,就称 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 为线性空间 V 的一个**基**.称 V 的基所含向量的个数 n 为线性空

间 V 的**维数**.

维数为 n 的线性空间为 n **维线性空间**，记为 V_n. 只含一个零向量的线性空间，称为零维线性空间. n 维与零维线性空间统称为有限维线性空间.

今后我们只讨论有限维的线性空间.

例 7 $R^{2\times3}$中任何一个由 6 个矩阵构成的线性无关向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_6$ 都是 $R^{2\times3}$的基，特别地 $E_{11}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$，$E_{12}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$，$E_{13}=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$，$E_{21}=\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&0\end{bmatrix}$，$E_{22}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}$，$E_{23}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$是 $R^{2\times3}$的基，从而 $R^{2\times3}$的维数是 6.

设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是 F 上线性空间 V_n 的一个基，则 V_n 中任何一个元素 α 都可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 唯一地线性表示，从而 V_n 可表示成

$$V_n=\{\alpha\,|\,\alpha=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n,x_1,x_2,\cdots,x_n\in F\}.$$

这样，V_n 中的元素 α 与有序数组 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 之间存在着一一对应的关系. 因此，可以用这个有序数组来表示 α.

定义 7.4 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是 F 上线性空间 V_n 的一个基，对于任意一元素 $\alpha\in V_n$，总有且仅有一组有序数 $x_1,x_2,\cdots,x_n\in F$，使

$$\alpha=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n,$$

称 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为 α 关于基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 的坐标，记为$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$.

例 8 在线性空间 $P[x]_2$ 中，$p_1(x)=1,p_2(x)=x,p_3(x)=x^2$ 是 $P[x]_2$ 的一个基，对 $P[x]_2$ 中任一多项式

$$p(x)=a_2x^2+a_1x+a_0,$$

有

$$p(x)=a_0p_1(x)+a_1p_2(x)+a_2p_3(x).$$

所以，$p(x)$在这个基下的坐标为(a_0,a_1,a_2).

若在 n 维线性空间 V_n 中取定一个基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$，$V_n$ 中 α、β 对于该基的坐标分别为$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$和$(y_1,y_2,\cdots,y_n)$，则向量 $\alpha+\beta$ 对于该基的坐标为$(x_1+y_1,x_2+y_2,\cdots,x_n+y_n)$，数 k 与 α 的乘积 $k\alpha$ 对于该基的坐标为$(kx_1,kx_2,\cdots,kx_n)$. 事实上，有

$$\begin{aligned}\alpha+\beta&=(x_1\varepsilon_1+x_2\varepsilon_2+\cdots+x_n\varepsilon_n)+(y_1\varepsilon_1+y_2\varepsilon_2+\cdots+y_n\varepsilon_n)\\&=(x_1+y_1)\varepsilon_1+(x_2+y_2)\varepsilon_2+\cdots+(x_n+y_n)\varepsilon_n,\\k\alpha&=k(x_1\varepsilon_1+x_2\varepsilon_2+\cdots+x_n\varepsilon_n)=kx_1\varepsilon_1+kx_2\varepsilon_2+\cdots+kx_n\varepsilon_n.\end{aligned}$$

这说明当 n 维线性空间取定了基以后，向量与它的坐标不仅一一对应，而且向量的加法与数乘运算都可以转化为坐标之间的加法与数乘运算. 因此，在给定的基下，n 维实线性空间 V_n 可以看成是 R^n，R^n 中凡只涉及线性运算的性质都适合于 V_n.

7.3 线 性 变 换

7.3.1 线性变换的定义及性质

以前熟知的函数 $f(x)$是数量函数，即给 x 以一值，$f(x)$就有一值与之对应. 我们将

讨论的线性变换是另一种函数——向量函数,即给定一个向量,有唯一一个向量与之对应的函数.我们从映射谈起.

定义 7.5 设 V_n,U_m 分别是数域 F 上的 n 维和 m 维的线性空间.如果对于 V_n 中任一元素 α,按照一定的规则 $\mathscr{A}$,总有 U_m 中一个确定的元素 β 和它对应,那么,这个对应的规则 $\mathscr{A}$ 称为由 V_n 到 U_m 的**映射**.

设映射 $\mathscr{A}$ 将 V_n 中元素 α 映成 U_m 中元素 β,则记为 $\mathscr{A}(\alpha)=\beta$,或 $\mathscr{A}\alpha=\beta$.

称 β 为 α 的**像**,像的全体构成的集合称为**像集**,记作 $\mathscr{A}(V_n)$,即

$$\mathscr{A}(V_n)=\{\beta|\beta=\mathscr{A}(\alpha),\alpha\in V_n\}.$$

定义 7.6 如果由 V_n 到 U_m 的映射 $\mathscr{A}$ 满足:

(1) 对任意 $\alpha_1,\alpha_2\in V_n$,都有 $\mathscr{A}(\alpha_1+\alpha_2)=\mathscr{A}(\alpha_1)+\mathscr{A}(\alpha_2)$;

(2) 对任意 $\alpha\in V_n$ 及任意 $k\in F$ 都有 $\mathscr{A}(k\alpha)=k\mathscr{A}(\alpha)$,

则称 $\mathscr{A}$ 是从 V_n 到 U_m 的**线性映射**.

设 $\mathscr{A}_1,\mathscr{A}_2$ 都是 V_n 到 U_m 的映射,如果对任意 $\alpha\in V_n$,都有 $\mathscr{A}_1(\alpha)=\mathscr{A}_2(\alpha)$,则称 $\mathscr{A}_1$ 与 $\mathscr{A}_2$ 相等,记为 $\mathscr{A}_1=\mathscr{A}_2$.

线性空间 V_n 到自身的线性映射称为 V_n 的**线性变换**.

例如,将 V_n 中任意向量都变成 V_n 中零向量的变换是 V_n 的线性变换,称其为**零变换**,记为 Γ_0,即 $\Gamma_0(\alpha)=0,\forall\ \alpha\in V_n$.

又如将 V_n 中任意向量 α 还变成 α 的变换也是 V_n 的线性变换,称其为 V_n 上的**恒等变换**,记 1_V,即 $1_V(\alpha)=\alpha,\forall\ \alpha\in V_n$.

V_n 中的线性变换 $\mathscr{A}$ 满足:

(1) $\mathscr{A}(0)=0,\mathscr{A}(-\alpha)=-\mathscr{A}(\alpha)$;

(2) 若 $\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha$,则

$$\mathscr{A}(\beta)=k_1\mathscr{A}(\alpha_1)+k_2\mathscr{A}(\alpha_2)+\cdots+k_m\mathscr{A}(\alpha_m);$$

(3) 若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性相关,则 $\mathscr{A}(\alpha_1),\mathscr{A}(\alpha_2),\cdots,\mathscr{A}(\alpha_m)$ 也线性相关.

注意:由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关,一般不能推出向量组 $\mathscr{A}(\alpha_1),\mathscr{A}(\alpha_2),\cdots,\mathscr{A}(\alpha_m)$ 也线性无关,零变换就是一个例子.

(4) $\mathscr{A}$ 的像集 $\mathscr{A}(V_n)$ 是 V_n 的一个线性子空间,称为 $\mathscr{A}$ 的**像空间**.

(5) 使 $\mathscr{A}(\alpha)=0$ 的 α 的全体

$$S_{\mathscr{A}}=\{\alpha\in V_n|\mathscr{A}(\alpha)=0\}$$

也是 V_n 的一个子空间,称为 $\mathscr{A}$ 的**核**.

证 (1) $\mathscr{A}(0)=\mathscr{A}(0+0)=\mathscr{A}(0)+\mathscr{A}(0)$,在等式两端加 $-\mathscr{A}(0)$,得 $0=\mathscr{A}(0)+\mathscr{A}(0)-\mathscr{A}(0)=\mathscr{A}(0)$,所以 $\mathscr{A}(0)=0$. $\mathscr{A}(-\alpha)=\mathscr{A}((-1)\alpha)=(-1)\mathscr{A}(\alpha)=-\mathscr{A}(\alpha)$.

(2) $$\begin{aligned}\mathscr{A}(\beta)&=\mathscr{A}(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m)\\&=k_1\mathscr{A}(\alpha_1)+k_2\mathscr{A}(\alpha_2)+\cdots+k_m\mathscr{A}(\alpha_m).\end{aligned}$$

(3) 因 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性相关,则存在不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$,使

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0,$$

则

$$\mathscr{A}(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m)=\mathscr{A}(0),$$

$$k_1\mathscr{A}(\alpha_1)+k_2\mathscr{A}(\alpha_2)+\cdots+k_m\mathscr{A}(\alpha_m)=0.$$

因 $k_1,k_2,\cdots,k_m$ 不全为 0，故 $\mathscr{A}(\alpha_1),\mathscr{A}(\alpha_2),\cdots,\mathscr{A}(\alpha_m)$ 线性相关．

(4) 显然 $\mathscr{A}(V_n)\subseteq V_n$，设 $\beta_1,\beta_2\in\mathscr{A}(V_n)$，则有 $\alpha_1,\alpha_2\in V_n$ 使 $\mathscr{A}(\alpha_1)=\beta_1$，$\mathscr{A}(\alpha_2)=\beta_2$，从而

$$\beta_1+\beta_2=\mathscr{A}(\alpha_1)+\mathscr{A}(\alpha_2)=\mathscr{A}(\alpha_1+\alpha_2)\in\mathscr{A}(V_n).$$

$$k\beta_1=k\mathscr{A}(\alpha_1)=\mathscr{A}(k\alpha_1)\in\mathscr{A}(V_n),k\in F.$$

故 V_n 的子集 $\mathscr{A}(V_n)$ 是 V_n 的一个线性子空间．

(5) 显然 $S_{\mathscr{A}}\subseteq V_n$，设 $\alpha_1,\alpha_2\in S_{\mathscr{A}}$，则

$$\mathscr{A}(\alpha_1+\alpha_2)=\mathscr{A}(\alpha_1)+\mathscr{A}(\alpha_2)=0+0=0,$$

$$\mathscr{A}(k\alpha_1)=k\mathscr{A}(\alpha_1)=k0=0,k\in F.\quad \square$$

例 9 设有 n 阶实方阵

$$A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{bmatrix},$$

定义 R^n 中的变换 $\mathscr{A}$ 如下：

$$\mathscr{A}(X)=AX,\quad \forall\ X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)'\in R^n.$$

则 $\mathscr{A}$ 是 R^n 中的线性变换，这个 $\mathscr{A}$ 的像空间，就是 A 的列向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 生成的 R^n 的子空间．$\mathscr{A}$ 的核就是齐次线性方程组 $AX=0$ 的解空间．

7.3.2 线性变换的矩阵表示

在例 9 中，用关系式

$$\mathscr{A}(X)=AX$$

简单明了地表示了 R^n 中的一个线性变换，我们自然希望用类似的方法清晰地表示数域 F 上的线性空间 V_n 中的任何一个线性变换．

设 $\mathscr{A}$ 是 V_n 中的一个线性变换，$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 是 V_n 的一个基，由于 $\mathscr{A}(\varepsilon_1),\mathscr{A}(\varepsilon_2),\cdots,\mathscr{A}(\varepsilon_n)$ 仍在 V_n 中，所以，它们可由 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 唯一地线性表示，设

$$\begin{cases}\mathscr{A}(\varepsilon_1)=a_{11}\varepsilon_1+a_{21}\varepsilon_2+\cdots+a_{n1}\varepsilon_n\\\mathscr{A}(\varepsilon_2)=a_{12}\varepsilon_1+a_{22}\varepsilon_2+\cdots+a_{n2}\varepsilon_n\\\mathscr{A}(\varepsilon_n)=a_{1n}\varepsilon_1+a_{2n}\varepsilon_2+\cdots+a_{nn}\varepsilon_n,\end{cases}\tag{1}$$

其右边系数矩阵的转置矩阵为

$$A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{bmatrix}.$$

记 $\mathscr{A}(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)=(\mathscr{A}(\varepsilon_1),\mathscr{A}(\varepsilon_2),\cdots,\mathscr{A}(\varepsilon_n))$，式(1)可形式地写成

$$\mathscr{A}(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)=(\mathscr{A}(\varepsilon_1),\mathscr{A}(\varepsilon_2),\cdots,\mathscr{A}(\varepsilon_n))=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)A,\tag{2}$$

称矩阵 A 为**线性变换 $\mathscr{A}$ 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 下的矩阵**.

显然,对于给定的基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$,矩阵 A 由 $\mathscr{A}$ 唯一确定.那么,给定一个 n 阶方阵 A,能否唯一地确定一个线性变换 $\mathscr{A}$ 呢?

设 α 是数域 F 上线性空间 V_n 中的任意向量,则 α 可由基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 唯一地线性表示

$$\alpha=x_1\varepsilon_1+x_2\varepsilon_2+\cdots+x_n\varepsilon_n,(x_1,x_2,\cdots,x_n\in F),$$

由线性变换的性质可知

$$\begin{aligned}\mathscr{A}(\alpha)&=\mathscr{A}(x_1\varepsilon_1+x_2\varepsilon_2+\cdots+x_n\varepsilon_n)\\&=x_1\mathscr{A}(\varepsilon_1)+x_2\mathscr{A}(\varepsilon_2)+\cdots+x_n\mathscr{A}(\varepsilon_n).\end{aligned}\tag{3}$$

由此可见,V_n 中任意元素 α 的像 $\mathscr{A}(\alpha)$ 由 α 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 下的坐标 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 及基的像 $\mathscr{A}(\varepsilon_1),\mathscr{A}(\varepsilon_2),\cdots,\mathscr{A}(\varepsilon_n)$ 所唯一确定.从而 $\mathscr{A}(\varepsilon_1),\mathscr{A}(\varepsilon_2),\cdots,\mathscr{A}(\varepsilon_n)$ 完全确定了线性变换 $\mathscr{A}$,而 $\mathscr{A}(\varepsilon_1),\mathscr{A}(\varepsilon_2),\cdots,\mathscr{A}(\varepsilon_n)$ 又可由 A 通过(1)式所唯一确定.因此,给定一个 F 上 n 阶方阵 A,可唯一地确定 V_n 的一个线性变换 $\mathscr{A}$.这样 V_n 中的线性变换与 n 阶方阵之间一一对应.值得注意的是,这种对应是以给定 V_n 的基为前提条件的.如果 V_n 的基改变了,$\mathscr{A}$ 的矩阵一般也要改变.

下面研究如何用线性变换 $\mathscr{A}$ 的矩阵 A 来刻划 $\mathscr{A}$.

设

$$\alpha=x_1\varepsilon_1+x_2\varepsilon_2+\cdots+x_n\varepsilon_n,\quad \mathscr{A}(\alpha)=y_1\varepsilon_1+y_2\varepsilon_2+\cdots+y_n\varepsilon_n.$$

由(2)和(3)得

$$\begin{aligned}\mathscr{A}(\alpha)&=x_1\mathscr{A}(\varepsilon_1)+x_2\mathscr{A}(\varepsilon_2)+\cdots+x_n\mathscr{A}(\varepsilon_n)\\&=(\mathscr{A}(\varepsilon_1),\mathscr{A}(\varepsilon_2),\cdots,\mathscr{A}(\varepsilon_n))\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}\\&=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)A\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}.\end{aligned}\tag{4}$$

另由假设

$$\mathscr{A}(\alpha)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{bmatrix},$$

由于 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 是基,故

$$\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{bmatrix}=A\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix},\tag{5}$$

即

$$Y=AX.$$

借助选定的基及坐标,矩阵 A 通过式(5)简单清晰地刻划了线性变换 $\mathscr{A}$.

例 10 在 R^3 中,线性变换 $\mathscr{A}$ 将

$$\varepsilon_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\quad \varepsilon_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\quad \varepsilon_3=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

依次变成

$$\eta_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\quad \eta_2=\begin{bmatrix}0\\2\\2\end{bmatrix},\quad \eta_3=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}.$$

求 $\mathscr{A}$ 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 下的矩阵.

解

$$\begin{cases}\mathscr{A}(\varepsilon_1)=\eta_1=1\cdot\varepsilon_1+0\cdot\varepsilon_2+0\cdot\varepsilon_3\\ \mathscr{A}(\varepsilon_2)=\eta_2=0\cdot\varepsilon_1+2\cdot\varepsilon_2+2\cdot\varepsilon_3\\ \mathscr{A}(\varepsilon_3)=\eta_3=0\cdot\varepsilon_1+0\cdot\varepsilon_2+0\cdot\varepsilon_3,\end{cases}$$

所以 $\mathscr{A}$ 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 下的矩阵为

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&2&0\end{bmatrix}.$$

由例 10 可以看出,R^n 中的线性变换 $\mathscr{A}$ 在自然基

$$\varepsilon_1=\begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix},\varepsilon_2=\begin{bmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{bmatrix},\varepsilon_3=\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{bmatrix}$$

下的矩阵为

$$A=(\mathscr{A}(\varepsilon_1),\mathscr{A}(\varepsilon_2),\cdots,\mathscr{A}(\varepsilon_n)).$$

例 11 求例 10 中的线性变换 $\mathscr{A}$ 在新基

$$\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\quad \alpha_2=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\quad \alpha_3=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$$

下的矩阵.

解

$$\mathscr{A}(\alpha_1)=\mathscr{A}(\varepsilon_1)=\eta_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},$$

$$\mathscr{A}(\alpha_2)=\mathscr{A}(\varepsilon_1+\varepsilon_2)=\mathscr{A}(\varepsilon_1)+\mathscr{A}(\varepsilon_2)=\eta_1+\eta_2=\begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix},$$

$$\mathscr{A}(\alpha_3)=\mathscr{A}(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3)=\mathscr{A}(\varepsilon_1)+\mathscr{A}(\varepsilon_2)+\mathscr{A}(\varepsilon_3)=\eta_1+\eta_2+\eta_3=\begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix}.$$

将 $\mathscr{A}(\alpha_1),\mathscr{A}(\alpha_2),\mathscr{A}(\alpha_3)$ 用 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示得

$$\mathscr{A}(\alpha_1)=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}=\alpha_1=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},$$

$$\mathscr{A}(\alpha_2)=\begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix}=-\alpha_1+2\alpha_3=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{bmatrix}-1\\0\\2\end{bmatrix},$$

$$\mathscr{A}(\alpha_3)=\begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix}=-\alpha_1+2\alpha_3=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{bmatrix}-1\\0\\2\end{bmatrix}.$$

于是 $\mathscr{A}$ 在新基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下的矩阵为

$$A_1=\begin{bmatrix}1&-1&-1\\0&0&0\\0&2&2\end{bmatrix}.$$

由例 10 和例 11 可以看出，同一个线性变换，在不同基下的矩阵一般说是不同的．但是，这些矩阵毕竟是同一个线性变换的矩阵，因此，它们之间应当有内在的联系．那么，同一个线性变换 $\mathscr{A}$ 在不同基下的矩阵之间的关系如何呢？

定理 7.2 在线性空间 V_n 中取定两个基：

$$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,$$

和

$$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n.$$

设由基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 到基 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 的过渡矩阵是 P，V_n 中线性变换 $\mathscr{A}$ 在这两个基下的矩阵依次为 A 和 B，则

$$B=P^{-1}AP.$$

证 由已知条件可知：

$$(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)P,$$

$$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)P^{-1},$$

$$\mathscr{A}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)A,$$

$$\mathscr{A}(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)B.$$

于是

$$\mathscr{A}(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)=\mathscr{A}[(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)P]=[\mathscr{A}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)]P$$

$$=[(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)A]P=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)AP=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)P^{-1}AP.$$

由于在基 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 下线性变换 $\mathscr{A}$ 的矩阵是唯一的，故 $B=P^{-1}AP$.]

定理 7.2 表明，线性空间 V_n 中同一线性变换在两个不同基下的矩阵是相似的，其相似变换矩阵就是相应的过渡矩阵．

用矩阵表示一个线性变换时，我们自然希望能找到较简单的矩阵表示该线性变换．

对角阵是较简单的．因此，我们总希望能用对角阵来描述某些线性变换．而同一线性变换在不同基下对应的矩阵是彼此相似的，所以我们要对矩阵进行相似变换，把它化成对角阵．这就是第六章中研究“相似对角化”的背景．

例 12 设数域 F 上的线性空间 V_3 中的线性变换 $\mathscr{A}$ 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下的矩阵是

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

求 $\mathscr{A}$ 在基 $\alpha_3,\alpha_2,\alpha_1$ 下的矩阵 B.

解

$$(\alpha_3,\alpha_2,\alpha_1)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

所以由基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 到基 $\alpha_3,\alpha_2,\alpha_1$ 的过渡矩阵是

$$P=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

于是，$\mathscr{A}$ 在基 $\alpha_3,\alpha_2,\alpha_1$ 下的矩阵为

$$\begin{aligned} B &= P^{-1}AP \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{33} & a_{32} & a_{31} \\ a_{23} & a_{22} & a_{21} \\ a_{13} & a_{12} & a_{11} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

定义 7.7 V_n 的线性变换 $\mathscr{A}$ 的像空间 $\mathscr{A}(V_n)$ 的维数，称为线性变换 $\mathscr{A}$ 的秩．

可以看出，若 A 是线性变换 $\mathscr{A}$ 的矩阵，则 $\mathscr{A}$ 的秩就等于矩阵 A 的秩 $R(A)$．若 A 的秩是 r，则 $\mathscr{A}$ 的核 $S_{\mathscr{A}}$ 的维数为 $n-r$.

习　题　七

1. 验证 2 阶实上三角阵的全体

$$S=\left\{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix} \middle| a_{11},a_{12},a_{22}\in R\right\}$$

是实数域 R 上的一个线性空间，并写出它的一个基．

2. 验证实线性空间 R^n 中与已知向量 α_0 正交的所有向量的全体

$$S=\{\alpha\in R^n \mid (\alpha_0,\alpha)=0\}$$

是 R^n 的一个子空间．

3. 已知 $1,x,x^2$ 是实线性空间

$$P[x]_2=\{p(x)=a_2x^2+a_1x+a_0 \mid a_2,a_1,a_1\in R\}$$

的基，试求 $p(x)=(x-2)(x-3)$ 在该基下的坐标．

4. 设 U 是线性空间 V 的子空间，并且 U 与 V 的维数相等．证明 $U=V$．

5. 在 $P[x]_2$ 中，设有两组基：

①$1,x,x^2$；　　　　②$1,1+x,(1+x)^2$．

(1) 求①到②的过渡矩阵；

(2) 求由①经过渡阵 $A=\begin{bmatrix}1&-1&2\\0&1&-1\\0&0&1\end{bmatrix}$ 得到的新基．

6. 判别下面定义的变换，哪些是线性变换，哪些不是？

(1) 在线性空间 V_n 中，$\mathscr{A}(\alpha)=\alpha+\alpha_0$，$\forall\ \alpha\in V_n$，其中 α_0 是 V_n 中一固定的向量；

(2) 在 R^3 中，$\mathscr{A}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2x_1+3x_2\\x_2+x_3\\x_3\end{bmatrix}$；

(3) 在 $P[x]_3$ 中，$\mathscr{A}p(x)=p'(x)$，$\forall\ p(x)\in R[x]_3$，其中 $p'(x)$ 表示 $p(x)$ 的导函数．

7. 说明 xOy 平面上变换 $\mathscr{A}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=A\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ 的几何意义，其中：

(1) $A=\begin{bmatrix}-1&0\\0&1\end{bmatrix}$；　　(2) $A=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}$；

(3) $A=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$；　　(4) $A=\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}$．

8. n 阶实对称阵的全体 V 对于矩阵的通常的线性运算构成一个实数域 R 上的 $\frac{n(n+1)}{2}$ 维线性空间，给定一个 n 阶实可逆阵 P，则变换

$$\mathscr{A}(B)=P'BP,\qquad \forall\ B\in V$$

称为合同变换，试证 V 的合同变换是线性变换．

9. 设 $\mathscr{A}$ 为 R^3 的线性变换，它使

$$\mathscr{A}\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\0\\3\end{bmatrix},\quad \mathscr{A}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\2\\1\end{bmatrix},\quad \mathscr{A}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\\1\\4\end{bmatrix}.$$

(1) 求 $\mathscr{A}$ 在自然基下的矩阵表示；

(2) 求 $\mathscr{A}$ 在基 $\alpha_1=\begin{bmatrix}-1\\0\\2\end{bmatrix}$，$\alpha_2=\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$，$\alpha_3=\begin{bmatrix}3\\-1\\0\end{bmatrix}$ 下的矩阵表示．

10. 设 $\mathscr{A}$ 是 R^3 中的一个线性变换，已知 $\mathscr{A}$ 在自然基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 下的矩阵为

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 2 & 6 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

求 $\mathscr{A}$ 在基 $\eta_1=\varepsilon_1,\eta_2=\varepsilon_1+\varepsilon_2,\eta_3=\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3$ 下的矩阵．

11．求 R^3 中下列线性变换的逆变换：

(1) $\begin{cases} y_1=2x_1+2x_2+x_3 \\ y_2=3x_1+x_2+5x_3 \\ y_3=3x_1+2x_2+3x_3; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} y_1=2x_1+x_2-x_3 \\ y_2=2x_1+x_2+2x_3 \\ y_3=x_1-x_2+x_3. \end{cases}$

12．设 $\mathscr{A}$ 是线性空间 V_n 中的线性变换，$\alpha\in V_n$，若 $\mathscr{A}^{k-1}\alpha\neq 0$，但 $\mathscr{A}^k\alpha=0$，试证向量组

$$\alpha,\mathscr{A}\alpha,\cdots,\mathscr{A}^{k-1}\alpha\quad(k\geqslant 1)$$

线性无关．

第八章　二次型与二次曲面

解析几何是用代数方法研究几何问题的数学分支．通过坐标，人们把方程与几何图形对应起来．解析几何所研究的重要问题之一就是判断一个已知方程代表何种几何图形．或者，给出一个图形的方程，通过图形的方程研究该几何图形的性质．例如，对于二元二次方程 $ax^2+2bxy+cy^2=d$，通过坐标变换，消除 xy 项，得到平面二次曲线的标准方程 $a'x'^2+c'y'^2=d'$．我们可以利用这个标准方程来判断该曲线的类型，研究曲线的性质．对于三元二次方程，也有类似的问题．本章主要研究如下问题：

1. 二次型的理论；
2. 空间曲面与曲线；
3. 二次曲面的分类.

8.1　实二次型

空间解析几何中，许多常见的二次曲面的方程具有二次齐次多项式的形式、因此，这些二次曲面的分类就归结为二次齐次多项式的分类. 我们把变量从二元，三元推广到 n 元，称 n 元二次齐次多项式为 n 元二次型. 二次型除了有几何背景外，在很多领域有重要应用.

我们先研究一般的 n 元实二次型，然后运用二次型理论讨论一般三元二次方程代表的几何图形.

8.1.1　二次型的定义及其矩阵

定义 8.1　含有 n 个变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，而系数取自数域 F 的 n 元二次齐次函数

$$\begin{aligned}f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=&a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+\cdots+2a_{1n}x_1x_n+\\&a_{22}x_2^2+2a_{23}x_2x_3+\cdots+2a_{2n}x_2x_n+\\&\cdots\cdots+a_{nn}x_n^2\end{aligned}\qquad(1)$$

称为**数域 F 上的 n 元二次型**，简称**二次型**．

当系数 a_{ij} 为复数时，称 f 为**复二次型**；当 a_{ij} 为实数时，称 f 为**实二次型**．

取 $a_{ji}=a_{ij}$，则 $2a_{ij}x_ix_j=a_{ij}x_ix_j+a_{ji}x_jx_i$，　于是式(1)可写成

$$\begin{aligned}f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=&a_{11}x_1^2+a_{12}x_1x_2+\cdots+a_{1n}x_1x_n+\\&a_{21}x_2x_1+a_{22}x_2^2+\cdots+a_{2n}x_2x_n+\\&\cdots\qquad\qquad\cdots\\&a_{n1}x_nx_1+a_{n2}x_nx_2+\cdots+a_{nn}x_n^2\end{aligned}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j. \tag{2}$$

为了方便，把式(1)表示成矩阵形式．由式(2)得

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}.$$

记

$$A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix},X=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix},$$

则二次型(1)可记为

$$f=X'AX. \tag{3}$$

由于 $a_{ij}=a_{ji}$，所以 A 是对称阵．

称(3)中对称阵 A 为**二次型 f 的矩阵**，称 A 的秩为**二次型 f 的秩**．

任给一个二次型 f，f 唯一地确定了一个对称阵 A；反之，任给一个对称阵 A，A 也可唯一地确定一个二次型．

例如，二次型

$$f=x_1^2+2x_1x_2+6x_1x_3+3x_2^2+x_2x_3+4x_3^2$$

的矩阵为

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 3\\ 1 & 3 & \frac{1}{2}\\ 3 & \frac{1}{2} & 4\end{bmatrix},$$

f 可写成

$$f=(x_1,x_2,x_3)\begin{bmatrix}1 & 1 & 3\\ 1 & 3 & \frac{1}{2}\\ 3 & \frac{1}{2} & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}.$$

本书只讨论实二次型．

8.1.2 合同矩阵

设 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X'AX$ 为 n 元实二次型．如果把 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)'$ 看作是 R^n 中向量 α 在某组基下的坐标，那么 n 元实二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 可以看作是 R^n 中向量 α 的函数．因此，这个二次型又可记作 $f(\alpha)=X'AX$，A 可以看作是在给定基底下二次型 $f(\alpha)$ 的矩阵．当 R^n 取不同的基时，一般说向量 α 的坐标就不同，这时二次型 $f(\alpha)$ 的矩阵如何随基底的改变而变化呢？

设 α 在 R^n 的基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 下的坐标为 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)'$，α 在 R^n 的基 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 下的坐标为 $Y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)'$．由坐标转换公式得

$$X=CY.$$

其中 C 是由基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 到基 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 的过渡矩阵．于是

$$f(\alpha)=X'AX=(CY)'A(CY)=Y'(C'AC)Y.$$

记 $B=C'AC$．显然 B 是实对称矩阵，从而 $B=C'AC$ 是 $f(\alpha)$ 在新基 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 下对应的矩阵．

关系 $B=C'AC$ 是矩阵之间的一种重要关系，它反映了同一二次型在不同基下对应的矩阵之间的关系．

定义 8.2 给定两个 n 阶方阵 A 和 B，如果存在可逆阵 C，使得

$$B=C'AC,$$

则称 A 与 B 合同．

矩阵合同有以下三条性质：

(1)自反性：任一 n 阶方阵 A 都与自身合同；

(2)对称性：若 A 与 B 合同，则 B 与 A 合同；

(3)传递性：若 A 与 B 合同，且 B 与 C 合同，则 A 与 C 合同．

定理 6.4 指出，对任一实对称阵 A，存在正交阵 P，使 $P^{-1}AP=P'AP=D$ 为对角阵，因此，任一实对称矩阵都与对角阵合同．

8.2 化实二次型为标准形

三元二次方程表示的是三维空间中的二次曲面，如果能选择适当的坐标系把三元二次方程化成标准形式，该二次曲面的形状也就容易判定了．一般地，我们先来讨论 n 元实二次型的化简问题．

设 C 是 n 阶可逆阵．称变量 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)'$，$Y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)'$ 之间的变换

$$X=CY$$

为**可逆线性变换**．R^n 中向量在两组基下的坐标转换就是可逆线性变换．如果 C 为正交阵，则称上述变换为**正交线性变换**．R^n 中向量在两个标准正交基下的坐标转换就是正交线性变换．

我们的目的是：对给定的实二次型

$$f(\alpha)=X'AX,$$

其中 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)'$ 是 α 在 R^n 的某一基下的坐标，寻找 R^n 的适当的基，使 $f(\alpha)$ 在新基下的矩阵 $B=C'AC$ 是对角阵，即将二次型化成只含平方项的二次型．这相当于寻找适当的可逆线性变换

$$X=CY,$$

使得

$$f=X'AX=(CY)'A(CY)=Y'(C'AC)Y$$

$$=Y'\begin{bmatrix}k_1 & & & \\ & k_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & k_n\end{bmatrix}Y=k_1y_1^2+k_2y_2^2+\cdots+k_ny_n^2.$$

用矩阵的语言来说，就是对实对称阵 A 寻找可逆阵 C，使 $C'AC$ 为对角阵．

称只含平方项的二次型为**标准二次型**．例如

$$f=x^2+y^2+4z^2,$$

$$f=3x_1^2-5x_2^2+7x_3^2+9x_4^2,$$

都是标准二次型．

由于 C 是可逆矩阵，所以 $R(A)=R(C'AC)$．因此，f 的秩等于 f 的标准型中系数不为零的平方项的个数．

8.2.1 用正交变换化实二次型为标准形

由第六章 6.2 节中定理 6.4 知，对实对称阵 A，存在正交阵 P，使

$$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix}, \quad 即 \quad P'AP=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix}.$$

把这个结论应用于实二次型，则有如下定理．

定理 8.1 对任意 n 元实二次型

$$f=X'AX,$$

存在正交线性变换

$$X=PY,$$

使二次型 f 化为标准形

$$f=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2,$$

其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 A 的 n 个特征值．

证 因 A 是实对称矩阵，存在正交阵 P，使

$$P'AP=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix},$$

其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 A 的 n 个特征值．经正交线性变换 $X=PY$，实二次型

$$f=X'AX=(PY)'A(PY)=Y'(P'AP)Y$$

$$=(y_1,y_2,\cdots,y_n)\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\\ \vdots\\ y_n\end{bmatrix}=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2. \quad \square$$

例 1 设二次型 $f=-2x_1x_2-2x_1x_3+2x_1x_4+2x_2x_3-2x_2x_4-2x_3x_4$，求一个正交线性变换 $X=PY$，将 f 化为标准形．

解 (1)f 的矩阵为 $A=\begin{bmatrix}0 & -1 & -1 & 1\\ -1 & 0 & 1 & -1\\ -1 & 1 & 0 & -1\\ 1 & -1 & -1 & 0\end{bmatrix}$,

(2)由

$$|\lambda E_4-A|=\begin{vmatrix}\lambda & 1 & 1 & -1\\ 1 & \lambda & -1 & 1\\ 1 & -1 & \lambda & 1\\ -1 & 1 & 1 & \lambda\end{vmatrix}\xlongequal{r_1+r_2+r_3+r_4}\begin{vmatrix}\lambda+1 & \lambda+1 & \lambda+1 & \lambda+1\\ 1 & \lambda & -1 & 1\\ 1 & -1 & \lambda & 1\\ -1 & 1 & 1 & \lambda\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda+1)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & \lambda-1 & -2 & 0\\ 0 & -2 & \lambda-1 & 0\\ 0 & 2 & 2 & \lambda+1\end{vmatrix}=(\lambda+1)^3(\lambda-3),$$

知 A 的特征值为$-1,-1,-1,3$.

(3)对 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=-1$,解

$$\begin{bmatrix}-1 & 1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & -1 & 1\\ 1 & -1 & -1 & 1\\ -1 & 1 & 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}.$$

得
$$\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix}=k_1\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 0\\ 0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 1\\ 0\end{bmatrix}+k_3\begin{bmatrix}-1\\ 0\\ 0\\ 1\end{bmatrix},$$

取
$$T_1=\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 0\\ 0\end{bmatrix},\quad T_2=\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 1\\ 0\end{bmatrix},\quad T_3=\begin{bmatrix}-1\\ 0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}.$$

令
$$\beta_1=T_1,$$

$$\beta_2=T_2-\frac{(\beta_1,T_2)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 1\\ 0\end{bmatrix}-\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 0\\ 0\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\ -1\\ 2\\ 0\end{bmatrix},$$

$$\beta_3=T_3-\frac{(\beta_1,T_3)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(\beta_2,T_3)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2$$

$$=\begin{bmatrix}-1\\ 0\\ 1\\ 0\end{bmatrix}-\frac{-1}{2}\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 0\\ 0\end{bmatrix}-\frac{-1}{3\times 2}\begin{bmatrix}1\\ -1\\ 2\\ 0\end{bmatrix}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}-1\\ 1\\ 1\\ 3\end{bmatrix},$$

再令
$$P_1=\frac{\beta_1}{|\beta_1|}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0\\ 0\end{bmatrix},\quad P_2=\frac{\beta_2}{|\beta_2|}=\frac{2\beta_2}{|2\beta_2|}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}\\ -\frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{2}{\sqrt{6}}\\ 0\end{bmatrix},$$

$$P_3=\frac{\beta_3}{|\beta_3|}=\frac{3\beta_3}{|3\beta_3|}=\begin{bmatrix}\frac{-1}{\sqrt{12}}\\ \frac{1}{\sqrt{12}}\\ \frac{1}{\sqrt{12}}\\ \frac{3}{\sqrt{12}}\end{bmatrix}.$$

对 $\lambda_4=3$，解 $\begin{bmatrix}3&1&1&-1\\1&3&-1&1\\1&-1&3&1\\-1&1&1&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$，

由
$$\begin{bmatrix}3&1&1&-1\\1&3&-1&1\\1&-1&3&1\\-1&1&1&3\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{行}}\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&3&-1&1\\1&-1&3&1\\1&-1&-1&-3\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{行}}\begin{bmatrix}1&0&0&-1\\0&1&0&1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{bmatrix},$$

得 $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=k\begin{bmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{bmatrix}$，取 $T_4=\begin{bmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{bmatrix}$，单位化（因只含一个向量不必正交化）得

$$P_4=\frac{T_4}{|T_4|}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\end{bmatrix}.$$

(4)　令 $P=(P_1,P_2,P_3,P_4)=\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{12}} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{12}} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{12}} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{3}{\sqrt{12}} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$，

则 P 为正交阵，由定理 8.1 知，经正交变换

$$X=PY,$$

原二次型 f 化为

$$f=X'AX=Y'\begin{bmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 3 \end{bmatrix}Y=-y_1^2-y_2^2-y_3^2+3y_4^2.$$

8.2.2　拉格朗日配方法化二次型为标准形

正交变换可视为由标准正交基到标准正交基的变换．如果不限于正交变换，可以用可逆线性变换把二次型 f 化为标准形，得到的标准形不是唯一的．下面介绍拉格朗日配方法化二次型为标准形．这是一种用可逆线性变换化二次型为标准形的方法，我们用例子来说明这种方法．

例 2　用可逆线性变换化二次型 f 为标准形，并求所用的变换矩阵及 f 的秩，

$$f=4x_1^2+2x_2^2+x_3^2-2x_4^2+4x_1x_2+4x_1x_3-4x_1x_4+4x_2x_3-4x_2x_4-8x_3x_4.$$

解　f 中含有变量 x_1 的平方项（其系数不为零），把含 x_1 的项归并起来，配方得

$$f=(2x_1+x_2+x_3-x_4)^2+x_2^2-3x_4^2+2x_2x_3-2x_2x_4-6x_3x_4.$$

上式右端除第一项外已不含 x_1．继续配方得

$$f=(2x_1+x_2+x_3-x_4)^2+(x_2+x_3-x_4)^2-(x_3+2x_4)^2.$$

做线性变换

$$\begin{cases} y_1=2x_1+x_2+x_3-x_4 \\ y_2=x_2+x_3-x_4 \\ y_3=x_3+2x_4 \\ y_4=x_4, \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} x_1=\frac{1}{2}y_1-\frac{1}{2}y_2 \\ x_2=y_2-y_3+3y_4 \\ x_3=y_3-2y_4 \\ x_4=y_4. \end{cases} \tag{4}$$

变换矩阵为

$$C=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 3\\ 0 & 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

由 C 可逆知(4)是可逆线性变换，在这个可逆线性变换下，

$$f=y_1^2+y_2^2-y_3^2.$$

f 的秩为 3.

例 3 化二次型 $f=2x_1x_2+2x_1x_3-6x_2x_3$ 成标准形，并求所用的可逆线性变换矩阵．

解 f 中不含平方项，含 x_1x_2 项．令

$$\begin{cases}x_1=y_1+y_2\\ x_2=y_1-y_2\\ x_3=\qquad y_3.\end{cases}\tag{5}$$

代入 f，得

$$f=2y_1^2-2y_2^2-4y_1y_2+8y_2y_3.$$

再按例 7 的方法配方，得

$$f=2(y_1-y_3)^2-2(y_2-2y_3)^2+6y_3^2.$$

令
$$\begin{cases}z_1=y_1-y_3\\ z_2=y_2-2y_3\\ z_3=y_3,\end{cases}$$

即
$$\begin{cases}y_1=z_1+z_3\\ y_2=z_2+2z_3\\ y_3=z_3.\end{cases}\tag{6}$$

线性变换(5)和(6)的矩阵依次为

$$C_1=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\text{和 }C_2=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

总的线性变换为 $X=C_1Y=C_1(C_2Z)=C_1C_2Z$，其矩阵为

$$C=C_1C_2=\begin{bmatrix}1 & 1 & 3\\ 1 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix},$$

由 $|C|=-2\neq 0$，知 C 可逆，故线性变换 $X=CZ$ 是可逆线性变换，在这个可逆变换下，

$$f=2z_1^2-2z_2^2+6z_3^2.$$

一般地，用配方法化二次型为标准形时，如果二次型不含平方项，可先用一个可逆线性变换把 f 化为含有平方项的二次型；对于含有 x_i^2 的二次型，可先集中含有 x_i 的所有项进行配方．对剩下的 $n-1$ 元实二次型，仍按上法进行．如此反复做下去，就可得到标准形，最后写出可逆线性变换的表达式(或矩阵)．做多次变换的情况，需要综合各次变换，得到总的线性变换的表达式(或矩阵)．

8.2.3 初等变换法化实二次型为标准形

所谓合同变换就是用可逆阵 C 及其转置在两边乘 A，即 $C'AC$. 将一般的实二次型通过配方法化成标准形的过程，如果用矩阵形式来表达，其实质是将二次型的矩阵通过一连串的合同变换，化成对角阵的过程. 拉格朗日配方法表明，对任一实对称阵 A，一定存在可逆阵 C，使 $C'AC=\Lambda$ 为对角阵. 将 C 分解为一系列初等阵之积：$C=P_1P_2\cdots P_l$，得

$$P_l'\cdots P_2'P_1'AP_1P_2\cdots P_l=\Lambda.$$

此式表明，A 可以通过一系列对于行、列来说"协调一致"的初等变换化为对角阵. 由此得到化实对称阵为与之合同的对角阵 Λ 的方法如下：将单位阵放在待变换的矩阵下面，构成 $2n\times n$ 矩阵 $\begin{bmatrix}A\\E\end{bmatrix}$. 对 $\begin{bmatrix}A\\E\end{bmatrix}$ 每作一次列变换，同时对前 n 行的 A 作一次相应的行变换，即 $\begin{bmatrix}A\\E\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}C'AC\\C\end{bmatrix}$，当 $C'AC$ 是对角阵时，E 就化成了 C，C 即是所求的合同变换矩阵.

例 4 用初等变换法将

$$f=X'\begin{bmatrix}0&1&-3\\1&0&1\\-3&1&0\end{bmatrix}X$$

化成标准二次型.

解

$$\begin{bmatrix}A\\E\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&-3\\1&0&1\\-3&1&0\\1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow[r_1+r_2]{c_1+c_2}\begin{bmatrix}2&1&-2\\1&0&1\\-2&1&0\\1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3+r_1]{c_3+c_1}\begin{bmatrix}2&1&0\\1&0&2\\0&2&-2\\1&0&1\\1&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow[r_2+r_3]{c_2+c_3}\begin{bmatrix}2&1&0\\1&2&0\\0&0&-2\\1&1&1\\1&2&1\\0&1&1\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_2-\frac{1}{2}\times r_1]{c_2-\frac{1}{2}\times c_1}\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 1\frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & -2\\ 1 & \frac{1}{2} & 1\\ 1 & 1\frac{1}{2} & 1\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}\xrightarrow[2\times r_2]{2\times c_2}\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 6 & 0\\ 0 & 0 & -2\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 3 & 1\\ 0 & 2 & 1\end{bmatrix}.$$

由此得标准形

$$f=2y_1^2+6y_2^2-2y_3^2.$$

所用的可逆线性变换为

$$X=CY,\quad C=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 3 & 1\\ 0 & 2 & 1\end{bmatrix}.$$

8.3 正定实二次型

8.3.1 实二次型的惯性定律

容易看出，给定二次型 f 的标准形不是唯一的．即用不同的可逆线性变换把同一个实二次型 f 化为标准形时，这些标准形中的系数一般说是不同的．但在实可逆线性变换下，同一个实二次型的标准形中的正系数、负系数及零系数的个数不因实可逆线性变换的不同而改变．这就是实二次型的惯性定律．

定理 8.2 设 n 元实二次型 $f=X'AX$ 经实可逆线性变换 $X=C_1Y,X=C_2Z$ 分别化成标准形

$$f=k_1y_1^2+k_2y_2^2+\cdots+k_ny_n^2,$$

及

$$f=l_1z_1^2+l_2z_2^2+\cdots+l_nz_n^2,$$

则 $k_1,k_2,\cdots,k_n$ 中正数的个数与 $l_1,l_2,\cdots,l_n$ 中正数的个数相等；$k_1,k_2,\cdots,k_n$ 中负数的个数与 $l_1,l_2,\cdots,l_n$ 中负数的个数也相等（当然，$k_1,k_2,\cdots,k_n$ 中零的个数与 $l_1,l_2,\cdots,l_n$ 中零的个数也相等），分别称之为 f 的**正惯性指数**与**负惯性指数**．

这相当于说：在秩为 r 的实二次型 f 的标准形中，正平方项的项数 p（称为 f 的正惯性指数）是唯一确定的，而负平方项的项数恰为 $r-p$（负惯性指数）．

8.3.2 正定二次型

定义 8.3 设有 n 元实二次型 $f=X'AX$，如果对 R^n 任何列向量 $X\neq0$，都有 $X'AX>0$，则称 f 为**正定二次型**．称正定二次型的矩阵为**正定矩阵**．

显然，正定阵一定是实对称阵，反之未必．

下面讨论正定二次型的判定条件．

定理 8.3 n 元实二次型 $f=X'AX$ 为正定二次型的充要条件是，f 的标准形中的 n 个系数全为正数，即 f 的正惯性指数是 n.

证 设经过实可逆线性变换 $X=CY$，f 化为

$$f=k_1y_1^2+k_2y_2^2+\cdots+k_ny_n^2. \tag{7}$$

必要性：假若 $k_1,k_2,\cdots,k_n$ 中有小于或等于零的数，不妨设 $k_1\leqslant 0$，取 $Y_0=\begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}$. 则

$$X_0=CY_0=C\begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}\neq 0(\text{否则 } Y_0=C^{-1}X_0=0\text{，矛盾})\text{，且}$$

$$X'_0AX_0=Y'_0(C'AC)Y_0=k_11^2+k_20^2+\cdots+k_n0^2=k_1\leqslant 0.$$

这与 f 是正定二次型矛盾．

充分性：对任意 n 维非零实向量 $X=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}$，由 C 可逆知

$$Y=C^{-1}X=\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{bmatrix}\neq 0,$$

于是由 $k_i>0,(i=1,2,\cdots,n)$ 知

$$X'AX=Y'(C'AC)Y=k_1y_1^2+k_2y_2^2+\cdots+k_ny_n^2>0.$$

故 f 是正定二次型． □

推论 8.1 实二次型 $f=X'AX$ 为正定二次型的充要条件是：f 的矩阵 A 的特征值全大于零．

证 设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 A 的 n 个特征值，由定理 8.1，存在正交变换 $X=PY$ 使

$$f=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2,$$

从而由定理 8.3 立即得证． □

推论 8.2 实二次型 $f=X'AX$ 为正定二次型的充要条件是：存在实可逆阵 Q，使

$$A=Q'Q.$$

证 充分性：对任意 n 维非零实向量 X，因 Q 可逆，故 $QX\neq 0$，从而

$$X'AX=X'Q'QX=(QX)'(QX)=|QX|^2>0.$$

所以 f 是正定二次型．

必要性：设 f 是正定二次型，由推论 1 知，存在正交阵 P，使

$$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{bmatrix},$$

其中 $\lambda_i>0(i=1,2,\cdots,n)$ 为 A 的 n 个特征值，于是

$$A=P\begin{bmatrix}\sqrt{\lambda_1} & & & \\ & \sqrt{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sqrt{\lambda_n}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt{\lambda_1} & & & \\ & \sqrt{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sqrt{\lambda_n}\end{bmatrix}P'.$$

令 $Q=\begin{bmatrix}\sqrt{\lambda_1} & & & \\ & \sqrt{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sqrt{\lambda_n}\end{bmatrix}P'$，则 $Q'=P\begin{bmatrix}\sqrt{\lambda_1} & & & \\ & \sqrt{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sqrt{\lambda_n}\end{bmatrix}$，于是

$$A=Q'Q.$$

由 P' 可逆，及 $\begin{bmatrix}\sqrt{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\lambda_n}\end{bmatrix}$ 可逆，知 Q 可逆． □

例 5 设 A 为正定阵，试证 A 的伴随阵 A^* 是正定阵．

证 由 A 是正定阵知 $A'=A$，且 A 的 n 个特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 全大于零，于是 $|A|=\prod\limits_{i=1}^{n}\lambda_i>0$，故 A 可逆且 $A^*=|A|A^{-1}$. 由第六章定理 6.4 知，存在正交阵 P，使

$$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix}.$$

于是

$$P^{-1}A^*P=P^{-1}(|A|A^{-1})P=|A|(P^{-1}AP)^{-1}$$

$$=|A|\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{|A|}{\lambda_1} & & & \\ & \frac{|A|}{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{|A|}{\lambda_n}\end{bmatrix},$$

故 A^* 的 n 个特征值 $\frac{|A|}{\lambda_1},\frac{|A|}{\lambda_2},\cdots,\frac{|A|}{\lambda_n}$ 全大于零．由

$$(A^*)'=(|A|A^{-1})'=|A|(A')^{-1}=|A|A^{-1}=A^*$$

知 A^* 是实对称阵，故由推论 1 知 A^* 是正定阵． □

例 6 设 A,B 都是 n 阶正定阵，试证 $A+B$ 也是正定矩阵．

证 因 A,B 是正定阵，所以 $(A+B)'=A'+B'=A+B$，即 $A+B$ 是实对称阵．对任意 n 维非零实向量 X，$X'AX>0$，且 $X'BX>0$，故

$$X'(A+B)X=X'AX+X'BX>0,$$

所以 $f=X'(A+B)X$ 是正定二次型，故 $A+B$ 是正定阵． □

定理 8.4 实对称矩阵 A 为正定矩阵的充要条件是：A 的各阶顺序主子式都大于零，即

$$a_{11}>0,\quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}>0,\quad \cdots,\quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}>0.$$

例 7 判定二次型

$$f(x,y,z)=5x^2+y^2+2z^2+4xy+4xz+2yz$$

是否正定.

解 二次型 f 的矩阵为

$$A=\begin{bmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

A 的各阶顺序主子式

$$5>0,\quad \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=1>0,\quad \begin{vmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}=1>0.$$

所以二次型 f 是正定二次型.

定义 8.4 设有 n 元实二次型 $f=X'AX$. 若对 R^n 中任意非零列向量 X,都有 $X'AX<0$,则称此二次型是**负定二次型**,而 f 的矩阵 A 称为**负定矩阵**.

显然,实二次型 $f=X'AX$ 是负定二次型的充要条件是 $-f=X'(-A)X$ 为正定二次型. 因此,由定理 8.4 立即可得如下推论.

推论 8.3 n 元实二次型 $f=X'AX$ 为负定二次型的充要条件是:A 的奇数阶顺序主子式小于零,而偶数阶顺序主子式大于零.

8.4 空间中的曲面与曲线

空间中一个平面上的所有点的坐标(x,y,z)满足一个三元一次方程;反之,坐标满足一个三元一次方程的点形成一个平面. 本节进一步讨论空间中曲面、曲线与三元方程 $F(x,y,z)=0$ 之间的关系.

给定空间坐标系中一个曲面 S,由于 S 上的点要满足一定的几何条件,这个条件一般可以写成点的坐标所满足的一个方程 $F(x,y,z)=0$. 曲面 S 上点的坐标一定满足这个方程,坐标满足这个方程的点也一定在曲面 S 上. 称这个方程 $F(x,y,z)=0$ 为**曲面 S 的方程**. 也称 S 为方程 $F(x,y,z)=0$ 的**图形**.

我们主要讨论如下两个基本问题:

(1) 已知一曲面,建立曲面的方程;

(2) 已知坐标(x,y,z)满足的一个方程,研究这方程所表示的曲面.

8.4.1 球面

已知球面的球心在点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$,半径是 r,求该球面的方程.

空间中任一点 $M(x,y,z)$ 在球面上当且仅当 $|M_0M|=r$，即

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}=r.$$

故该球面方程为

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=r^2. \tag{8}$$

如果球心在坐标原点，则球面方程为

$$x^2+y^2+z^2=r^2.$$

将方程(8)展开，得

$$x^2+y^2+z^2-2x_0x-2y_0y-2z_0z+x_0^2+y_0^2+z_0^2-r^2=0,$$

这个方程的特点是：(1)它是三元二次方程；(2)二次项 x^2,y^2,z^2 的系数相同；(3)没有 xy，yz，zx 这类二次项．事实上，具有这三个条件的方程，一般说来，其图形也是球面．因为用配完全平方的方法，总可以将这样的方程化成形式：

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=k. \tag{9}$$

当 $k>0$ 时，它就是球心在 $M_0(x_0,y_0,z_0)$，半径为 $\sqrt{k}$ 的球面方程；当 $k=0$ 时，球面收缩为一点(点球面)；当 $k<0$ 时，无图形(叫**虚球面**).

8.4.2 柱面

平行于定直线并沿定曲线 C 移动的直线 L 形成的轨迹叫做**柱面**，定曲线 C 叫做柱面的**准线**，动直线 L 叫做柱面的**母线**．

例 8 讨论方程 $x^2+y^2=r^2$ 的图形．

解 在 xOy 平面上，$x^2+y^2=r^2$ 表示一个圆．我们在空间直角坐标系中讨论问题，方程中不含 z，那么，无论 z 怎样，只要点 $M(x,y,z)$ 中的 x,y 满足 $x^2+y^2=r^2$，该点就在这方程的图形上．这就是说，凡是通过 xOy 平面内圆 $x^2+y^2=r^2$ 上点 $M(x,y,0)$，且平行于 z 轴的直线 L 都在这方程的图形上．因此，该方程的图形是以 xOy 平面上圆为准线，母线平行于 z 轴的柱面．方程

$$\begin{cases}x^2+y^2=r^2\\ z=0\end{cases}$$

为其准线方程.

一般地，含有两个变量的方程在平面上表示一条曲线，而在空间里表示一个柱面，它以平面上的这条曲线为准线，其母线平行于方程中不出现的那个变量对应的坐标轴．

给定一个柱面，总可以适当选取坐标系，使其母线平行于某坐标轴．当柱面的母线平行于 z 轴，且准线是 xOy 面上的曲线

$$\begin{cases}f(x,y)=0\\ z=0\end{cases}$$

时，柱面的方程就是

$$f(x,y)=0.$$

例如，方程

(1) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$；　(2) $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$；　(3) $x^2=2py\quad(p>0)$

在空间直角坐标系下，分别表示母线平行于 z 轴的**椭圆柱面**、**双曲柱面**和**抛物柱面**(图 8.1).

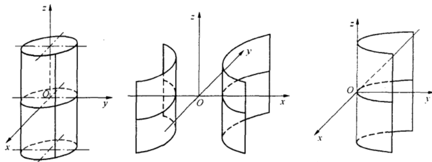


图 8.1

8.4.3 旋转曲面

由一条平面曲线 C 绕该平面上的一条定直线 L 旋转一周所成的曲面叫做**旋转曲面**，曲线 C 称为**母线**，直线 L 称为**旋转轴**.

为方便，我们常把曲线所在的平面取作坐标面，把旋转轴取作坐标轴.

在 yOz 面上，给定曲线 C:

$$\begin{cases} f(y,z)=0 \\ x=0. \end{cases}$$

将其绕 z 轴旋转一周，求此旋转曲面的方程.

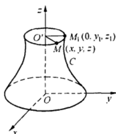


图 8.2

设 $M(x,y,z)$ 是曲面上任一点，且 M 点位于曲线 C 上点 $M_1(0,y_1,z_1)$ 所转过的圆周上(图 8.2). 则

$$z_1=z.$$

又 M,M_1 到 z 轴的距离相等，所以

$$\sqrt{x^2+y^2}=|y_1|,$$

即

$$y_1=\pm\sqrt{x^2+y^2}.$$

因 $M_1(0,y_1,z_1)$ 在曲线 C 上，故

$$f(y_1,z_1)=0.$$

从而

$$f(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0,$$

这就是所求的旋转曲面方程.

同理，曲线 C 绕 y 轴旋转所成的旋转曲面的方程为

$$f(y,\pm\sqrt{x^2+z^2})=0.$$

总之，位于坐标面上的曲线 C，绕其上的一个坐标轴转动，所成的旋转面方程可以这样得到：曲线方程中与旋转轴相同的变量不动，而用另两个变量的平方和的平方根(加正、

负号)替代曲线方程中另一变量即可.

例 9 求直线$\begin{cases} z=ky \\ x=0 \end{cases}$绕 z 轴转动得到的曲面的方程(图 8.3).

解 z 不动,用$\pm\sqrt{x^2+y^2}$替代$z=ky$中的 y,得

$$z=\pm k\sqrt{x^2+y^2},$$

即

$$z^2=k^2(x^2+y^2).$$

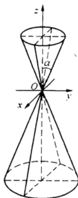


图 8.3

称直线 L 绕另一条与 L 相交的直线 L' 旋转一周所得的旋转面为**圆锥面**.L 与 L' 的交点叫圆锥面的**顶点**,两直线的夹角 $\alpha(0<\alpha<\frac{\pi}{2})$叫做圆锥面的**半顶角**.例 2 中的曲面就是顶点在原点,半顶角为 $\operatorname{arccot}|k|$ 的圆锥面.

例 10 求双曲线

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{b^2}=1 \\ y=0, \end{cases}$$

分别绕 x 轴、z 轴旋转所得曲面的方程.

解 绕 x 轴旋转时,x 不动,用$\pm\sqrt{y^2+z^2}$替代 z,得该旋转曲面的方程

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2+z^2}{b^2}=1. \tag{10}$$

绕 z 轴旋转时,z 不动,用$\pm\sqrt{x^2+y^2}$替代 x 得该旋转曲面的方程

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{b^2}=1. \tag{11}$$

分别称方程(10)和(11)为**旋转双叶双曲面**和**旋转单叶双曲面方程**(图 8.4).

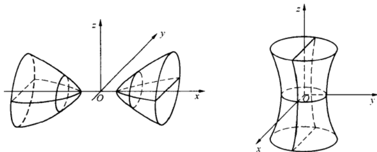


图 8.4

类似地,椭圆$\begin{cases} z=0 \\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \end{cases}$绕 x 轴旋转得**旋转椭球面**(图 8.5):

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2+z^2}{b^2}=1.$$

抛物线$\begin{cases}x=0\\y^2=2pz\end{cases}$绕 z 轴旋转得**旋转抛物面**(图 8.6)：

$$x^2+y^2=2pz.$$

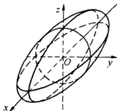


图 8.5

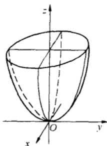


图 8.6

8.4.4 空间曲线

空间曲线可以视为两个通过它的曲面的交线．若空间曲线 C 是两个曲面

$$S_1:\quad F(x,y,z)=0$$

$$S_2:\quad G(x,y,z)=0$$

的交线，则曲线 C 的方程为

$$\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0,\end{cases}$$

称其为**空间曲线 C 的一般方程**．

例如，方程组

$$\begin{cases}x^2+y^2=1\\x+y+z=3\end{cases}$$

表示平面 $\pi: x+y+z=3$ 与柱面 $S: x^2+y^2=1$ 的交线(图 8.7)．

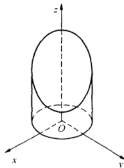


图 8.7

有时，空间曲线 C 的方程也可以用参数表示成

$$\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\\z=z(t).\end{cases}$$

例 11　在半径为 a 的圆柱面上，有一动点 M 以角速度 ω 绕旋转轴转动，同时又以匀速 v 沿母线上升，求点 M 的运动轨迹方程．

解　取圆柱面的轴线为 z 轴，并设 M 点上升方向为 z 轴正向．取时间 t 为参数，$t=0$ 时，点 M 位于 $A(a,0,0)$ 处．经时间 t，动点 M 运动到 $M_t(x,y,z)$(图 8.8)，记 M_t 在 xOy 面上的投影为 M'，则 M' 的坐标为 $x,y,0$，显然，$\angle AOM'=\omega t$，从而

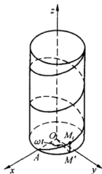


图 8.8

$$x=a\cos(\omega t),$$
$$y=a\sin(\omega t).$$

由于动点 M 以线速度 v 沿平行于 z 轴的正方向上升，所以

$$z=vt.$$

故该曲线的方程为

$$\begin{cases}x=a\cos(\omega t)\\ y=a\sin(\omega t)\\ z=vt.\end{cases}$$

称此曲线为**螺旋线**.

设 C 是一条空间曲线，π 是一个平面，以 C 为准线，作母线垂直于 π 的柱面，该柱面与平面 π 的交线叫做 C 在平面 π 上的**投影曲线**，简称**投影**.

求空间曲线在坐标面上的投影是很重要的. 设曲线 C 的方程是

$$\begin{cases}F_1(x,y,z)=0\\ F_2(x,y,z)=0.\end{cases}$$

从这个方程组中消去 z 所得到的方程

$$F(x,y)=0,$$

就是以 C 为准线，母线垂直于 xOy 面的柱面方程. 故曲线 C 在 xOy 面上的投影为

$$\begin{cases}F(x,y)=0\\ z=0.\end{cases}$$

同样，从 C 的方程中消去 x 或 y，就可以得到 C 在 yOz 或 zOx 平面上的投影.

例 12 求曲线 C：

$$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=1 \quad z\geqslant 0,\\ x^2+y^2-x=0\end{cases}$$

在 xOy，zOx 坐标面上的投影.

解 $x^2+y^2-x=0$ 就是以 C 为准线，母线垂直于 xOy 的柱面，所以 C 在 xOy 面的投影为：

$$\begin{cases}x^2+y^2-x=0\\ z=0,\end{cases}$$

它是 xOy 面上以 $(\frac{1}{2},0,0)$ 为圆心，$\frac{1}{2}$ 为半径的圆.

从曲线 C 的方程中消去 y 得

$$z^2+x=1 \qquad (x\geqslant 0,z\geqslant 0),$$

故曲线 C 在 zOx 面上的投影为：

$$\begin{cases}z^2+x=1 \quad (x\geqslant 0,z\geqslant 0)\\ y=0,\end{cases}$$

它是 zOx 面上的抛物线段.

由参数方程表示的空间曲线在坐标面上的投影是容易求出的，例如，螺旋线

$$\begin{cases} x=\cos t \\ y=\sin t \\ z=t, \end{cases}$$

在 xOy 平面的投影为

$$\begin{cases} x=\cos t \\ y=\sin t \\ z=0. \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ z=0. \end{cases}$$

在 yOz 平面上的投影为

$$\begin{cases} y=\sin t \\ z=t \\ x=0, \end{cases}$$

即
$$\begin{cases} y=\sin z \\ x=0. \end{cases}$$

8.5 二次曲面

现在我们研究三维几何空间中三元二次方程代表的曲面——二次曲面．一般的三元二次方程都可写成

$$X'AX+v'X+a_{44}=0,$$

其中

$$A=(a_{ij})_{3\times 3},\quad a_{ij}=a_{ji},\quad i,j=1,2,3,$$

$$X=\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix},\qquad v=\begin{bmatrix} a_{14} \\ a_{24} \\ a_{34} \end{bmatrix}.$$

依定理 8.1，存在正交变换

$$X=PY,$$

使二次型 $X'AX$ 化为标准二次型 $\lambda_1 x'^2+\lambda_2 y'^2+\lambda_3 z'^2$，这意味着存在三维几何空间中适当的直角坐标系，使原来的三元二次方程化成

$$\lambda_1 x'^2+\lambda_2 y'^2+\lambda_3 z'^2+a'_{14}x'+a'_{24}y'+a'_{34}z'+a'_{44}=0.$$

对系数 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 以及 $a'_{14},a'_{24},a'_{34},a'_{44}$ 的各种可能情况分别进行讨论，将得到三元二次方程所代表的各种不同类型的二次曲面．下面分别介绍几种常见的二次曲面及其标准方程．

8.5.1 椭球面

由方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \quad (a>0,b>0,c>0) \tag{12}$$

确定的曲面，称为**椭球面**，数 a,b,c 称为椭球面的三个半轴．

当 $a=b=c$ 时，方程(12)确定一个球面．当 a,b,c 中有两个相等时，方程(12)确定一个旋转椭球面．

椭球面(12)有如下特点：

(1) 图形关于三个坐标面、三个坐标轴及原点都对称，且被限制在以原点为中心的长方体

$$|x|\leqslant a,\quad |y|\leqslant b,\quad |z|\leqslant c$$

内．

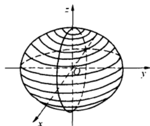


图 8.9

(2) 图形被平面 $z=h(|h|<c)$ 截割，截线为

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1,\\ z=h,\end{cases}$$

即
$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{\left[a\sqrt{1-\dfrac{h^2}{c^2}}\right]^2}+\dfrac{y^2}{\left[b\sqrt{1-\dfrac{h^2}{c^2}}\right]^2}=1,\\ z=h.\end{cases}$$

这是 $z=h$ 平面上的椭圆，随 $|h|$ 的增大，其长、短半轴 $a\sqrt{1-\dfrac{h^2}{c^2}}$，$b\sqrt{1-\dfrac{h^2}{c^2}}$ 减小．$|h|$ 由零变到 c，椭圆由 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\\ z=0\end{cases}$ 变到一点 $(0,0,c)$．

图形被平面 $y=h$，$(|h|<b)$ 或 $x=h(|h|<a)$ 截割也有类似的结果(图 8.9)．

8.5.2 单叶双曲面

方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1(a>0,b>0,c>0)\tag{13}$$

的图形称为**单叶双曲面**．该方程的特点是，平方项有一个取负号，两个取正号．类似地，方程

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \quad 或 \quad -\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

的图形也是单叶双曲面．

用平面 $z=h$ 截方程(13)的图形，得截线为椭圆

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{\left[a\sqrt{1+\dfrac{h^2}{c^2}}\right]^2}+\dfrac{y^2}{\left[b\sqrt{1+\dfrac{h^2}{c^2}}\right]^2}=1\\ z=h.\end{cases}$$

随着 $|h|$ 的增大，其长、短半轴也增大．

用平面 $y=k$ 截该图形得截线为双曲线

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{k^2}{b^2} \\ y=k. \end{cases}$$

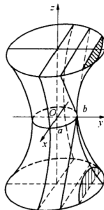


图 8.10

当$|k|<b$时，它的实轴与x轴平行；当$|k|>b$时，它的实轴与z轴平行；当$|k|=b$时，截线为

$$\begin{cases} (\frac{x}{a}+\frac{z}{c})(\frac{x}{a}-\frac{z}{c})=0 \\ y=\pm b. \end{cases}$$

它是两条相交直线(图 8.10).

8.5.3 双叶双曲面

方程

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1, \quad (a,b,c>0) \tag{14}$$

的图形称为**双叶双曲面**. 该方程的特点是，平方项的系数一个取正号，二个取负号. 类似地，方程

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,$$

或

$$-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

的图形也是双叶双曲面.

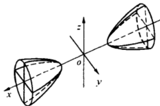


图 8.11

方程(14)的图形如图 8.11 所示.

用平面$z=h$或$y=h$截曲面(14)，得双曲线

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{h^2}{c^2} \\ z=h \end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases} \frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1+\frac{h^2}{b^2} \\ y=h, \end{cases}$$

用平面$x=h(|h|\geqslant a)$截曲面(14)，得椭圆

$$\begin{cases} \frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1+\frac{h^2}{a^2} \\ x=h. \end{cases}$$

8.5.4 椭圆抛物面

方程

$$\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}=z \quad (p,q\text{ 同号}) \tag{15}$$

的图形称为**椭圆抛物面**.

用$z=h$(h与p,q同号)截该曲面，得椭圆

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{2ph}+\dfrac{y^2}{2qh}=1\\ z=h.\end{cases}$$

用平面 $x=h$ 或 $y=h$ 截该曲面，得抛物线

$$\begin{cases}y^2=2q(z-\dfrac{h^2}{2p})\\ x=h.\end{cases}$$

或

$$\begin{cases}x^2=2p(z-\dfrac{h^2}{2q})\\ y=h.\end{cases}$$

方程(15)的图形如图 8.12 所示.

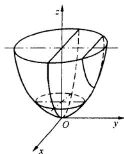


图 8.12

8.5.5 双曲抛物面

方程

$$\frac{x^2}{2p}-\frac{y^2}{2q}=z \quad (p,q\text{ 同号}) \tag{16}$$

的图形称为**双曲抛物面**(或**马鞍面**). 方程的特点是有两个异号的平方项，另一个变量是一次项，无常数项.

用平面 $z=h(h\neq0)$ 截该曲面得双曲线

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{2ph}-\dfrac{y^2}{2qh}=1\\ z=h.\end{cases}$$

当 h 与 p、q 同号时，双曲线实轴与 x 轴平行；当 h 与 p、q 异号时，实轴与 y 轴平行. $h=0$ 时，该曲面与 xOy 平面的交线是两条相交的直线

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{2p}-\dfrac{y^2}{2q}=0\\ z=0.\end{cases}$$

用 $x=h$ 或 $y=h$ 平面截该曲面均得抛物线. 方程(16)的图形如图 8.13 所示.

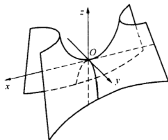


图 8.13

8.5.6 二次锥面

方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0 \quad (a,b,c>0) \tag{17}$$

的图形称为**二次锥面**. 该方程是二次齐次方程，平方项的系数两个取正号，一个取负号(也可写成两个系数取负号，一个系数取正号的形式).

用平面 $z=h(h\neq0)$ 截该曲面得椭圆

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\left[\dfrac{h}{c}\right]^2\\ z=h.\end{cases}$$

随$|h|$的增大,该椭圆的长、短轴也不断加大. 该锥面与 xOy 平面(即 $z=0$ 平面)仅交于一点 $O(0,0,0)$.

当 $a=b$ 时,锥面(17)式就是 8.4.3 中介绍的圆锥面.

如果 $M_0(x_0,y_0,z_0)$满足方程(17),则 $M(tx_0,ty_0,tz_0)$也满足方程(17),即若点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$在锥面(17)上,则过点 $O(0,0,0)$和 $M_0(x_0,y_0,z_0)$的直线 L 上的任一点均在锥面(17)上.

二次锥面的图形如图 8.14 所示.

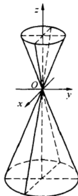


图 8.14

8.5.7 二次曲面的一般方程

前面介绍的二次曲面的方程都是以标准形式出现的,称其为二次曲面的标准方程. 二次曲面的一般方程为

$$\begin{aligned}f(x,y,z)=&a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz\\&+a_{14}x+a_{24}y+a_{34}z+a_{44}=0,\end{aligned}\tag{18}$$

其中 $a_{ij}(i,j=1,2,3,4)$是实数.

为了便于判定以一般方程给出的二次曲面的类型,下面借助二次型理论研究如何把一个二次曲面的一般方程化为标准方程,即在 R^3 中适当选取新直角坐标系,使曲面(18)在该坐标系中的方程为标准方程.

令

$$A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix},\quad X=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix},\quad v=\begin{bmatrix}a_{14}\\a_{24}\\a_{34}\end{bmatrix}.$$

其中 $a_{ij}=a_{ji}(i,j=1,2,3)$,则(18)可以写成

$$f(X)=X'AX+v'X+a_{44}=0.\tag{19}$$

设实对称矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$,相应的标准正交特征向量为

$$P_1=\begin{bmatrix}p_{11}\\p_{21}\\p_{31}\end{bmatrix},\qquad P_2=\begin{bmatrix}p_{12}\\p_{22}\\p_{32}\end{bmatrix},\qquad P_3=\begin{bmatrix}p_{13}\\p_{23}\\p_{33}\end{bmatrix}.$$

作正交线性变换

$$X=PY,\text{即}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=P\begin{bmatrix}x'\\y'\\z'\end{bmatrix},$$

其中

$$P=(P_1,P_2,P_3)=\begin{bmatrix}p_{11}&p_{12}&p_{13}\\p_{21}&p_{22}&p_{23}\\p_{31}&p_{32}&p_{33}\end{bmatrix},\qquad Y=\begin{bmatrix}x'\\y'\\z'\end{bmatrix}.$$

方程(19)化为

$$\begin{aligned}f(X)&=X'AX+v'X+a_{44}\\&=(PY)'A(PY)+v'(PY)+a_{44}\\&=Y'(P'AP)Y+(v'P)Y+a_{44}\\&=\lambda_1x'^2+\lambda_2y'^2+\lambda_3z'^2+a'_{14}\ x'+a'_{24}\ y'+a'_{34}\ z'+a_{44}=0.\end{aligned}$$

记为

$$g(x',y',z')=\lambda_1x'^2+\lambda_2y'^2+\lambda_3z'^2+a'_{14}\ x'+a'_{24}\ y'+a'_{34}\ z'+a_{44}=0 \quad (20)$$

这样，在 R^3 中坐标原点不变，以 A 的标准正交特征向量 P_1,P_2,P_3 为基，那么方程(18)化为方程(20).

现在分四种情形讨论：

1. 假定矩阵 A 的所有特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 都不等于零，并有相同的符号．对(式 20)进行配方，可得

$$\lambda_1(x'+\frac{a'_{14}}{2\lambda_1})^2+\lambda_2(y'+\frac{a'_{24}}{2\lambda_2})^2+\lambda_3(z'+\frac{a'_{34}}{2\lambda_3})^2-(\frac{a'^2_{14}}{4\lambda_1}+\frac{a'^2_{24}}{4\lambda_2}+\frac{a'^2_{34}}{4\lambda_3}-a_{44})=0.$$

令
$$\frac{a'^2_{14}}{4\lambda_1}+\frac{a'^2_{24}}{4\lambda_2}+\frac{a'^2_{34}}{4\lambda_3}-a_{44}=d,$$

得

$$\lambda_1(x'+\frac{a'_{14}}{2\lambda_1})^2+\lambda_2(y'+\frac{a'_{24}}{2\lambda_2})^2+\lambda_3(z'+\frac{a'_{34}}{2\lambda_3})^2-d=0. \quad (21)$$

再作平移变换

$$\bar{x}=x'+\frac{a'_{14}}{2\lambda_1},\quad \bar{y}=y'+\frac{a'_{24}}{2\lambda_2},\quad \bar{z}=z'+\frac{a'_{34}}{2\lambda_3},$$

得

$$\lambda_1\bar{x}^2+\lambda_2\bar{y}^2+\lambda_3\bar{z}^2=d. \quad (22)$$

对此又可分以下三种情况：

①如果 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$(同号)与 d 异号，那么不存在实数点$(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$满足方程(22)，称此曲面为**虚椭球面**.

②如果 $d=0$，那么只有点$(0,0,0)$满足方程(22)，称此椭球面为退化的.

③如果 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$(同号)与 d 同号，那么方程(22)可化为椭球面的标准方程

$$\frac{\bar{x}^2}{a^2}+\frac{\bar{y}^2}{b^2}+\frac{\bar{z}^2}{c^2}=1.$$

其中
$$a^2=\frac{d}{\lambda_1},\quad b^2=\frac{d}{\lambda_2},\quad c^2=\frac{d}{\lambda_3}.$$

2. 假定矩阵 A 的所有特征值都不等于零，并且它们中一个的符号与另外两个的符号相反．不妨设 $\lambda_1>0,\lambda_2>0,\lambda_3<0$(其余情况可类似地讨论). 此时方程(20)也可经平移变换化为方程(22). 再分三种情况：

①若 $d>0$，方程(22)可化为单叶双曲面的标准方程

$$\frac{\bar{x}^2}{a^2}+\frac{\bar{y}^2}{b^2}-\frac{\bar{z}^2}{c^2}=1.$$

其中
$$a^2=\frac{d}{\lambda_1},\quad b^2=\frac{d}{\lambda_2},\quad c^2=\frac{d}{-\lambda_3}.$$

②若 $d=0$ 时，方程(22)就是二次锥面标准方程

$$\frac{\bar{x}^2}{a^2}+\frac{\bar{y}^2}{b^2}-\frac{\bar{z}^2}{c^2}=0.$$

③若 $d<0$，方程(22)可化为双叶双曲面的标准方程

$$-\frac{\bar{x}^2}{a^2}-\frac{\bar{y}^2}{b^2}+\frac{\bar{z}^2}{c^2}=1.$$

其中
$$a^2=\frac{-d}{\lambda_1},\quad b^2=\frac{-d}{\lambda_2},\quad c^2=\frac{d}{\lambda_3}.$$

3. 假定矩阵 A 的特征值只有一个是零，不妨设 $\lambda_1\neq0,\lambda_2\neq0,\lambda_3=0$. 此时方程(20)可经平移变换化为

$$\lambda_1\bar{x}^2+\lambda_2\bar{y}^2+a'_{34}\bar{z}=d, \tag{23}$$

其中
$$d=\frac{a'^2_{14}}{4\lambda_1}+\frac{a'^2_{24}}{4\lambda_2}-a_{44}.$$

再分两种情况：

①如果 $a'_{34}=0$，则方程(23)就是

$$\lambda_1\bar{x}^2+\lambda_2\bar{y}^2=d. \tag{24}$$

当 λ_1,λ_2,d 同号时，方程(24)化为椭圆柱面标准方程

$$\frac{\bar{x}^2}{a^2}+\frac{\bar{y}^2}{b^2}=1.$$

当 λ_1,λ_2 同号，但与 d 异号时，不存在实点 $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ 满足方程(24)；当 λ_1,λ_2 同号，且 $d=0$ 时，方程(24)的图形为新坐标系中的 $\bar{z}$ 轴；当 λ_1,λ_2 异号，且 $d=0$ 时，方程(24)的图形为相交于 $\bar{z}$ 轴的两个平面；当 λ_1,λ_2 异号，且 $d\neq0$ 时，方程(24)可化为双曲柱面的标准方程

$$\frac{\bar{x}^2}{a^2}-\frac{\bar{y}^2}{b^2}=1,$$

或者

$$-\frac{\bar{x}^2}{a^2}+\frac{\bar{y}^2}{b^2}=1.$$

②如果 $a'_{34}\neq0$，则方程(23)可写为 $\lambda_1\bar{x}^2+\lambda_2\bar{y}^2=-a'_{34}(\bar{z}-\frac{d}{a'_{34}})$，所以，再经平移变换能化为

$$\lambda_1\bar{x}^2+\lambda_2\bar{y}^2=a\,\bar{z}\quad(a=-a'_{34}\neq0). \tag{25}$$

当 λ_1,λ_2 同号时，方程(25)化为椭圆抛物面标准方程

$$\frac{\bar{x}^2}{2p}+\frac{\bar{y}^2}{2q}=\bar{z}\quad(p,q\text{ 同号}).$$

当 λ_1,λ_2 异号时，方程(25)化为双曲抛物面标准方程

$$\frac{\bar{x}^2}{2p}-\frac{\bar{y}^2}{2q}=\bar{z}\quad(p,q\text{ 同号}).$$

4. 假定矩阵 A 的特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 中有两个为零，不妨设 $\lambda_1\neq0,\lambda_2=\lambda_3=0$. 再分四种情况：

①$a'_{24}=a'_{34}=0$ 时，方程(20)可化为

$$\lambda_1\bar{x}^2=d,$$

λ_1，d 同号时，其图形为两个平行平面；λ_1，d 异号时，没有实点$(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$满足该方程；$d=0$ 时，其图形为新坐标系的 $\bar{y}\bar{O}\bar{z}$ 坐标面．

②$a'_{24}\neq0$，$a'_{34}=0$ 时，方程(20)可化为

$$\lambda_1\bar{x}^2+a'_{24}\bar{y}=0,$$

进一步可写成抛物柱面的标准方程

$$\bar{x}^2=2p\bar{y}.$$

③$a'_{24}=0$，$a'_{34}\neq0$ 时，方程(20)可化为

$$\lambda_1\bar{x}^2+a'_{34}\bar{z}=0,$$

进一步可写成抛物柱面的标准方程

$$\bar{y}^2=2p\bar{z}.$$

④$a'_{24}\neq0$，$a'_{34}\neq0$ 时，方程(20)可化为

$$\lambda_1\bar{x}^2+p\bar{y}+q\bar{z}=0, \tag{26}$$

$p=a'_{24}\neq0$，$q=a'_{34}\neq0$. 对方程(26)再作正交线性变换

$$\begin{bmatrix}\tilde{x}\\ \tilde{y}\\ \tilde{z}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & p/\sqrt{p^2+q^2} & q/\sqrt{p^2+q^2}\\ 0 & -q/\sqrt{p^2+q^2} & p/\sqrt{p^2+q^2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{x}\\ \bar{y}\\ \bar{z}\end{bmatrix},$$

方程(26)化为 $\lambda_1\tilde{x}^2+\sqrt{p^2+q^2}\tilde{y}=0$，进一步可化为 $\tilde{x}^2=2p'\tilde{y}$，其图形为抛物柱面．

例 13 讨论方程

$$f(x,y,z)=6x^2-2y^2+6z^2+4xz+8x-4y-8z+a=0$$

的图形类型．

解 记

$$A=\begin{bmatrix}6 & 0 & 2\\ 0 & -2 & 0\\ 2 & 0 & 6\end{bmatrix},\quad v=\begin{bmatrix}8\\ -4\\ -8\end{bmatrix}.$$

因 $|\lambda E-A|=(\lambda+2)(\lambda-4)(\lambda-8)$，$\lambda_1=8$，$\lambda_2=4$，$\lambda_3=-2$ 为 A 的特征值．分别求 A 的属于特征值 8，4，−2 的特征向量，并将其标准正交化(对此题只需将其标准化即可)，得 A 的标准正交的特征向量：

$$P_1=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\ 0\\ \frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix},\quad P_2=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\ 0\\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix},\quad P_3=\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 0\end{bmatrix}.$$

取

$$P=(P_1,P_2,P_3)=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0\\ 0 & 0 & 1\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0\end{bmatrix}.$$

在正交线性变换

$$\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=P\begin{bmatrix}x'\\ y'\\ z'\end{bmatrix}$$

下，原方程化为

$$8x'^2+4y'^2-2z'^2+8\sqrt{2}y'-4z'+a=0.$$

配方得

$$8x'^2+4(y'+\sqrt{2})^2-2(z'+1)^2=6-a.$$

再作平移变换

$$\begin{bmatrix}\bar{x}\\ \bar{y}\\ \bar{z}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x'\\ y'+\sqrt{2}\\ z'+1\end{bmatrix},$$

得

$$8\bar{x}^2+4\bar{y}^2-2\bar{z}^2=6-a.$$

①当 $a=6$ 时，方程可写成

$$\frac{\bar{x}^2}{1}+\frac{\bar{y}^2}{2}-\frac{\bar{z}^2}{4}=0,$$

其图形为二次锥面.

②当 $a<6$ 时，方程可写成

$$\frac{\bar{x}^2}{\frac{6-a}{8}}+\frac{\bar{y}^2}{\frac{6-a}{4}}-\frac{\bar{z}^2}{\frac{6-a}{2}}=1,$$

其图形为单叶双曲面.

③当 $a>6$ 时，方程可写成

$$-\frac{\bar{x}^2}{\frac{a-6}{8}}-\frac{\bar{y}^2}{\frac{a-6}{4}}+\frac{\bar{z}^2}{\frac{a-6}{2}}=1,$$

其图形为双叶双曲面.

习 题 八

1. 用矩阵表示下列二次型，并求出这些二次型的秩：

(1) $f=x^2+4xy+4y^2+2xz+z^2+4yz$;

(2) $f=x^2+y^2-7z^2-2xy-4xz-4yz$；

(3) $f=x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2-2x_1x_2+6x_2x_3+4x_1x_3-2x_1x_4-4x_2x_4$.

2. 用配方法化下列二次型为标准形，并求出所用的可逆线性变换．

(1) $f=x_1^2+6x_1x_2+5x_2^2-4x_1x_3+4x_3^2$；

(2) $f=x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1$.

3. 用初等变换法将下列二次型化为标准形，并求合同变换矩阵 C：

(1) $f=4x_1^2+2x_2^2+x_3^2-2x_4^2+4x_1x_2+4x_1x_3-4x_1x_4+4x_2x_3-4x_2x_4-8x_3x_4$；

(2) $f=x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3$.

4. 用正交变换将下列二次型化为标准形，并写出所用的正交变换．

(1) $f=4x_1^2+4x_2^2+4x_3^2+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$；

(2) $f=2x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+4x_2x_3$.

5. 判断下列二次型是否是正定二次型．

(1) $f=2x_1^2+6x_2^2+4x_3^2-2x_1x_2-2x_1x_3$；

(2) $f=x_1^2+3x_2^2+9x_3^2+19x_4^2-2x_1x_2+4x_1x_3-6x_2x_4-12x_3x_4+2x_1x_4$.

6. 求下列二次型中的参数 t，使二次型正定．

(1) $5x_1^2+x_2^2+tx_3^2+4x_1x_2-2x_1x_3-2x_2x_3$；

(2) $2x_1^2+x_2^2+3x_3^2+2tx_1x_2+2x_1x_3$.

7. 设实对称矩阵 A 是正定的，证明：

(1) A^{-1}是正定的； (2) $kA(k>0)$是正定的．

8. 设实对称阵 A 是正定的，试证 $2A+E$ 是正定的．

9. 设 A 是实对称矩阵，试证当 k 充分大时，矩阵 $A+kE$ 是正定的．

10. 设二次型

$$f(x)=X'AX=\sum_{i=1}^{n}x_i^2+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}x_ix_j.$$

(1) 写出 $f(x)$在正交变换下的一个标准形；

(2) 判断 f 是否正定；

(3) 当 $n=2$ 时，求正定阵 B，使 $A=B^2$.

11. 设 A,B 都是 n 阶实对称阵，且 A 与 B 的特征值完全相同，试证存在正交阵 C，使 $AC=CB$.

12. 设 A 是 n 阶正定矩阵，试证

$$|A+2E|>2^n.$$

13. 设 A 是 $m\times n$ 实列满秩阵，证明 $A'A$ 正定．

14. 指出下列方程在平面直角坐标系与空间直角坐标系中各表示什么图形．

(1) $x^2+y^2-2y=0$；

(2) $x^2=2y$；

(3) $4x+2y=1$；

(4) $\begin{cases}y=5x+1\\ y=2x-3.\end{cases}$

15. 将 xOy 坐标面上的双曲线 $4x^2-9y^2=36$ 分别绕 x 轴及 y 轴旋转一周，求所生成的两个旋转曲面的方程．

16. 求母线平行于 x 轴，且通过曲线 $\begin{cases}2x^2+y^2+z^2=16\\x^2-y^2+z^2=0\end{cases}$ 的柱面方程．

17. 求球面 $x^2+y^2+z^2=9$ 与平面 $x+z=1$ 的交线在 xOy 面上的投影的方程．

18. 将下列曲线的一般方程化为参数方程：

(1) $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=9,\\y=x;\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}(x-1)^2+y^2+(z+1)^2=4,\\z=0.\end{cases}$

19. 求螺旋线 $\begin{cases}x=a\cos\theta\\y=a\sin\theta\\z=b\theta\end{cases}$ 在三个坐标面上的投影曲线的直角坐标方程．

20. 求旋转抛物面 $z=x^2+y^2$，$(0\leqslant z\leqslant 4)$，在三个坐标面上的投影．

21. 求直线 $L:\dfrac{x-1}{0}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{1}$ 绕 z 轴旋转所生成的旋转曲面的方程．

22. 求以 $(0,0,0)$ 为顶点，且以 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1\\y=b\end{cases}$ 为准线的锥面方程．

23. 指出 $\dfrac{y^2}{2}+\dfrac{z^2}{2}-x=0$ 所表示的曲面是由 xOy 面上什么曲线绕什么轴旋转而成的．

24. 指出下列方程的图形是什么曲面：

(1) $16x^2+9y^2+16z^2=144$;

(2) $z=(y-1)^2+x^2$;

(3) $4x^2-4y^2+36z^2=144$;

(4) $x=(y+1)^2+\dfrac{z^2}{4}$;

(5) $x^2+4y^2-z^2+9=0$;

(6) $z=\sqrt{x^2+y^2}$;

(7) $x^2+2y^2-z^2=0$;

(8) $z=xy$.

25. 指出下列方程所表示的曲线：

(1) $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=25\\x=3;\end{cases}$

(2) $\begin{cases}x^2+4y^2+9z^2=36\\y=1;\end{cases}$

(3) $\begin{cases}x^2-4y^2+z^2=25\\x=-3;\end{cases}$

(4) $\begin{cases}y^2+z^2-4x+8=0\\y=4;\end{cases}$

(5) $\begin{cases}\dfrac{y^2}{19}-\dfrac{z^2}{14}=1\\x-2=0.\end{cases}$

26. 画出下列曲面围成立体的图形：

(1) $2x+3y+6z=6$, $x=0,y=0,z=0$;

(2) $z=\sqrt{1-x^2-y^2}, z=0$;

(3) $x^2+y^2-z+1=0$, $z=3$;

(4) $y=x^2, y=2, z=0, z=2$.

27. 已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=5x_1^2+5x_2^2+3x_3^2-2x_1x_2+6x_1x_3-6x_2x_3$，问 $f(x_1,x_2,x_3)=1$ 表示何种曲面.

28. 用正交变换和坐标平移将下面二次曲面方程化为标准方程：

$$x_1^2+x_2^2-2x_3^2+8x_1x_2-4x_1x_3-4x_2x_3+6x_1+6x_2+6x_3-\frac{15}{2}=0.$$

综合练习 100 题

一、填空题

1. 设 A 是 n 阶矩阵，满足 $AA'=E$，$|A|<0$，则 $|A+E|=$________.

2. 若 4 阶行列式 D 的某一行的所有元素及其余子式都相等，则 $D=$________.

3. 在一个 n 阶行列式中，如果等于零的元素多于 n^2-n 个，那么这个行列式 $D=$________.

4. 设 A 是 $m\times n$ 矩阵，B 是 $n\times m$ 矩阵，若 $m>n$，则 $|AB|=$________.

5. 若 n 阶方阵 A、B 满足 $AB=B$，$|A-E|\neq 0$，则 $B=$________.

6. 若 n 阶方阵 A、B 满足 $A+AB=E$，则 $A+BA=$________.

7. 若 n 阶方阵 A、B、C 满足 $ABC=E$，则 $B'A'C'=$________.

8. 若 A、B 都是 n 阶方阵，$|A|=1$，$|B|=-3$，则 $|3A^*B^{-1}|=$________.

9. 若 n 阶方阵 A 满足 $|A|=0$，$A^*\neq 0$，则秩$(A)=$________.

10. 设 A、B 是两个 n 阶方阵，$|A+B|=1$，$|A-B|=2$，则 $\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix}=$________.

11. 设矩阵 $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$，则 $(A^*)^{-1}=$________.

12. A 为 m 阶方阵，B 为 n 阶方阵，$|A|=a$，$|B|=b$，则 $\begin{vmatrix} O & A \\ B & C \end{vmatrix}=$________.

13. 已知 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 都是单位几何向量，且满足 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=-\dfrac{3}{2}$，则 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=$________.

14. 设 A 为 3 阶方阵，其特征值为 $3,-1,2$，则 $|A^2+E|=$________.

15. 已知 $A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & a \end{bmatrix}$，则 $R(A)=$________.

16. 已知 n 阶方阵 A 的各行元素之和都等于 0，且 $R(A)=n-1$，则 $AX=0$ 的通解为________.

17. 矩阵 $A_{m\times n}$ 的秩为 r，则 $AX=0$ 的基础解系一定由________个线性无关的解向量构成.

18. 若矩阵 A 满足 $A^3=A$，则 A 的特征值只能是________或________或________.

19. 如果 $\xi=(1,1,-1)'$ 是方阵

$$A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & a & 3 \\ -1 & b & -2 \end{bmatrix}$$

的一个特征向量，则 $a=$________；$b=$________.

20. 已知 A 与 B 相似，且 $B=\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$，则 $|\lambda A^2-A|=$________.

21. 已知 $A_{3\times 3}$ 的特征值为 1，2，3，则 $|A^{-1}+A^*|=$________.

22. 已知 2 是 A 的一个特征值，则 $|A^2+A-6E|=$________.

23. 设 A 是 n 阶可逆矩阵，α,β 是 n 维列向量，$\beta' A^{-1}\alpha=0$，则 $\alpha\beta' A^{-1}$ 的特征值为________.

24. 若 n 阶方阵 A 的行向量组线性相关，则________一定是 A 的一个特征值.

25. 直线 $\begin{cases} 10x+2y-2z=27 \\ x+y-z=0 \end{cases}$ 的单位方向向量为________.

26. 已知

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 7 & 6 & 8 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 7 & 9 \\ 8 & 1 & 8 & 8 \end{vmatrix},$$

$A_{41},A_{42},A_{43},A_{44}$ 为 D 中第 4 行元素的代数余子式，则 $A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}=$________.

27. 设 A 为 2 阶方阵，$A^3=0$，则 $A^2=$________.

28. 若两个非零几何向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$，则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角 $\theta=$________.

29. 直线 L：$\begin{cases} x+2y-z-6=0 \\ 2x-y+z-1=0 \end{cases}$ 的参数方程为________.

30. 圆 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2-12x+4y-6z+24=0 \\ 2x+2y+z+1=0 \end{cases}$ 的半径 $R=$________.

二、选择题

1. 设 n 元齐次线性方程组 $AX=0$ 的系数矩阵 A 的秩为 r，则 $AX=0$ 有非零解的充要条件是(　　).

(A) $r=n$；　　(B) A 的行向量组线性无关；

(C) A 的列向量组线性相关；　　(D) A 的列向量组线性无关.

2. 设 A 是 $m\times n$ 矩阵，$AX=0$ 是非齐次线性方程组 $AX=\beta$ 所对应的齐次线性方程组，则下列结论正确的是(　　).

(A) 若 $AX=0$ 只有零解，则 $AX=\beta$ 有唯一解；

(B) 若 $AX=0$ 有非零解，则 $AX=\beta$ 有无穷多解；

(C) 若 $AX=\beta$ 有无穷多解，则 $AX=0$ 有非零解；

(D) $AX=\beta$ 的任两解之和还是 $AX=\beta$ 的解.

3. 设非齐次线性方程组 $AX=\beta$ 的系数行列式为零,则(　　).

(A) 方程组有无穷多解;　　(B) 方程组无解;

(C) 若方程组有解,则称有无穷多解;　(D) 方程组有唯一解.

4. 设 A 是 $m\times n$ 矩阵,对于线性方程组 $AX=\beta$,下列结论正确的是(　　).

(A) 若 A 的秩等于 m,则方程组有解;

(B) 若 A 的秩小于 n,则方程组有无穷多解;

(C) 若 A 的秩等于 n,则方程组有唯一解;

(D) 若 $m>n$,则方程组无解.

5. 设 5 阶方阵 A 的秩是 3,则其伴随矩阵 A^* 的秩为(　　).

(A) 3;　　(B) 4;　　(C) 0;　　(D) 2.

6. 设 A 是 n 阶方阵,$n>2$,A^* 是 A 的伴随矩阵则下列结论正确的是(　　).

(A) $AA^*=|A|$;　　(B) 若 $|A|\neq 0$,则 $|A^*|\neq 0$;

(C) $A^*=\frac{1}{|A|}A^{-1}$;　　(D) 秩$(A)=$秩(A^*).

7. 设 A、B 是 n 阶方阵,A 非零,且 $AB=0$,则必有(　　).

(A) $B=0$;　　(B) $BA=0$;

(C) $(A+B)^2=A^2+B^2$;　　(D) $|B|=0$.

8. 设有两个平面方程

$$\pi_1:\ a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$$

$$\pi_2:\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0,$$

如果

$$秩\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{bmatrix}=2,$$

则一定有(　　).

(A) π_1 与 π_2 平行;　　(B) π_1 与 π_2 垂直;

(C) π_1 与 π_2 重合;　　(D) π_1 与 π_2 相交.

9. 设 A 为 n 阶可逆矩阵,λ 是 A 的一个特征根,则 A 的伴随阵 A^* 的特征根之一是(　　).

(A) λ^{n-1};　　(B) $\lambda|A|$;

(C) λ;　　(D) $\lambda^{-1}|A|$.

10. n 阶方阵 A 有 n 个不同的特征值是 A 与对角阵相似的(　　).

(A) 充分必要条件;　　(B) 充分而非必要条件;

(C) 必要而非充分条件;　　(D) 既非充分条件也非必要条件.

11. 已知 n 阶方阵 A 与某对角阵相似,则(　　).

(A) A 有 n 个不同的特征值;

(B) A 一定是 n 阶实对称阵;

(C) A 有 n 个线性无关的特征向量;

(D) A 的属于不同特征值的特征向量正交.

12. 下列说法正确的是(　　).

(A) 若有全不为 0 的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$ 使 $k_1\alpha_1+\cdots+k_m\alpha_m=0$,则向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关;

(B) 若有一组不全为 0 的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$ 使得 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m\neq 0$,则向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关;

(C) 若存在一组数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$ 使 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0$,则向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性相关;

(D) 任意 4 个 3 维几何向量一定线性相关.

13. 设 A,B 是 n 阶方阵,满足:对任意 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)'$ 都有 $X'AX=X'BX$,下列结论中正确的是(　　).

(A) 若秩(A)=秩(B),则 $A=B$;　　(B) 若 $A'=A$,则 $B'=B$;

(C) 若 $B'=B$,则 $A=B$;　　(D) 若 $A'=A,B'=B$,则 $A=B$.

14. 设 A,B 均为 n 阶正定矩阵,则

(A) AB 正定;　　(B) A^2+B 正定;

(C) $A-B$ 正定;　　(D) kA 正定.

15. 设 A 是 n 阶方阵,$A^2=E$,则(　　).

(A) A 为正定矩阵;　　(B) A 为正交矩阵;

(C) $A^{-1}=A$;　　(D) $\mathrm{tr}(A)=n^2$.

16. 设 A,B 是 n 阶方阵,下列结论中错误的是(　　).

(A) 若 A,B 都可逆,则 $A'B^*$ 也可逆;

(B) 若 A,B 都是实对称正定矩阵,则 $A+B^{-1}$ 也是实对称正定矩阵;

(C) 若 A,B 都是正交矩阵,则 AB 也是正交矩阵;

(D) 若 A,B 都是实对称矩阵,则 AB 是实对称正定矩阵.

17. 设 A,B 是 n 阶方阵,下列结论中错误的是(　　).

(A) 若 A 经列的初等变换化成 B,则秩(A)=秩(B);

(B) 若 A 经行的初等变换化成 B,则 $A^{-1}=B^{-1}$;

(C) 若 A 经行的初等变换化成 B,则 $AX=0$ 与 $BX=0$ 同解;

(D) 若 A 经列的初等变换化成 B,则 A 的列向量组与 B 的列向量组等价.

18. 设 $A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{31}+a_{11}&a_{32}+a_{12}&a_{33}+a_{13}\end{bmatrix}$,

$$P_1=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix},P_2=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{bmatrix},$$

则必有(　　).

(A) $AP_1P_2=B$;　　(B) $AP_2P_1=B$;

(C) $P_1P_2A=B$;　　(D) $P_2P_1A=B$.

19. 若 A 与 B 相似,则(　　).

(A) $\lambda E-A=\lambda E-B$;　　(B) $|\lambda E+A|=|\lambda E+B|$;

(C) $A^*=B^*$;　　(D) $A^{-1}=B^{-1}$.

20. 若 $A^2=E$,则(　　).

(A) $A+E$ 可逆;　　(B) $A-E$ 可逆;

(C) $A+E=0$ 或 $A-E=0$;　　(D) $A\neq E$ 时,$A+E$ 不可逆.

21. 设 A 是 n 阶方阵,下列结论错误的是(　　).

(A) 若 A 的特征值全不为 0,则 A 可逆;

(B) 若 $AX=0$ 只有零解,则 A 可逆;

(C) A 可逆的充要条件是 A 至少有一个特征值不是零;

(D) A 可逆的充要条件是:秩$(A)=n$.

22. 实二次型 $f=X'AX$ 为正定二次型的充要条件是(　　).

(A) f 的负惯性指数是 0;

(B) 存在正交阵 P 使 $A=P'P$;

(C) 存在可逆阵 T 使 $A=T'T$;

(D) 存在矩阵 B 使 $A=B'B$.

23. 设 B 是 $m\times n$ 实矩阵,$A=B'B$,则下列结论中错误的是(　　).

(A) 线性方程组 $BX=0$ 只有零解$\Leftrightarrow A$ 正定;

(B) 秩$(B)=n\Leftrightarrow A$ 正定;

(C) B 的列向量组线性无关$\Leftrightarrow A$ 正定;

(D) 秩$(B)=m\Leftrightarrow A$ 正定.

24. 设 A 是 n 阶方阵,$|A|=a\neq 0$,则 $|A^*A^{-1}|$ 等于(　　).

(A) a;　　(B) $\dfrac{1}{a}$;　　(C) a^{n-2};　　(D) a^n.

25. 设 A,B 是 n 阶方阵,则必有(　　).

(A) $|A+B^{-1}|=|A|+|B|^{-1}$;　　(B) $(A+B)^{-1}=B^{-1}+A^{-1}$;

(C) $(AB)^2=A^2B^2$;　　(D) $|A'B|=|BA|$.

26. 已知 η_1,η_2 是非齐次线性方程组 $AX=\beta$ 的两个不同的解,ξ_1,ξ_2 是对应的齐次线性方程组 $AX=0$ 的基础解系,k_1,k_2 为任意常数,则方程组 $AX=\beta$ 的通解为(　　).

(A) $k_1\xi_1+k_2\xi_2+\dfrac{\eta_1-\eta_2}{2}$;　　(B) $k_1\xi_1+k_2(\xi_1+\xi_2)+\dfrac{\eta_1+\eta_2}{2}$;

(C) $k_1\xi_1+k_2(\eta_1-\eta_2)+\eta_1$;　　(D) $k_1\xi_1+k_2(\eta_1-\eta_2)+(\eta_1+\eta_2)$.

27. 设有直线 $L_1:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-5}{-2}=\dfrac{z+8}{1}$ 与 $L_2:\begin{cases}x-y=6\\2y+z=3\end{cases}$,则 L_1 与 L_2 的夹角为(　　).

(A) $\dfrac{\pi}{6}$;　　(B) $\dfrac{\pi}{4}$;　　(C) $\dfrac{\pi}{3}$;　　(D) $\dfrac{\pi}{2}$.

28. 若 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2$ 都是 4 维列向量,且 4 阶行列式 $|\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \beta_1|=m$,$|\alpha_1\ \alpha_2\ \beta_2\ \alpha_3|=n$,则 4 阶行列式 $|\alpha_3\ \alpha_2\ \alpha_1\ \beta_1+\beta_2|$ 等于(　　).

(A) $m+n$;　　(B) $-(m+n)$;　　(C) $m-n$;　　(D) $n-m$.

29. 设 n 阶矩阵 A 非奇异($n\geqslant 2$)，则(　　).

(A) $(A^*)^*=|A|^{n-1}A$;　　(B) $(A^*)^*=|A|^{n+1}A$;

(C) $(A^*)^*=|A|^{n-2}|A|$;　　(D) $(A^*)^*=|A|^{n+2}A$.

30. 设矩阵 $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$ 的秩是 3，则直线 $\frac{x-a_3}{a_1-a_2}=\frac{y-b_3}{b_1-b_2}=\frac{z-c_3}{c_1-c_2}$ 与直线 $\frac{x-a_1}{a_2-a_3}=\frac{y-b_1}{b_2-b_3}=\frac{z-c_1}{c_2-c_3}$(　　).

(A) 相交于一点;　　(B) 重合;

(C) 平行但不重合;　　(D) 异面.

三、计算题

1. 设 $A=\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$，求 A^5 及 $|A^{10}|$.

2. 设 $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & c \\ b & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

(1) a、b、c 满足什么条件时，A 的秩是 3.

(2) a、b、c 取何值时，A 是对称矩阵.

(3) 取一组 a、b、c 使 A 为正交阵.

3. 设有三维列向量

$$\alpha_1=\begin{bmatrix} 1+\lambda \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},\alpha_2=\begin{bmatrix} 1 \\ 1+\lambda \\ 1 \end{bmatrix},\alpha_3=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1+\lambda \end{bmatrix},\beta=\begin{bmatrix} 0 \\ \lambda \\ \lambda^2 \end{bmatrix},$$

问 λ 取何值时:

(1) β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，且表达式唯一;

(2) β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，但表达式不唯一;

(3) β 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示.

4. 设 3 阶矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=3$，对应的特征向量依次为:

$$\xi_1=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},\quad \xi_2=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix},\quad \xi_3=\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 9 \end{bmatrix},$$

又

$$\beta=2\xi_1-2\xi_2+\xi_3,$$

求 $A^n\beta$(n 为自然数).

5. 设

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 2 & 2\\ 2 & -1 & -2\\ 2 & -2 & -1\end{bmatrix}.$$

(1) 求 A 的特征值;

(2) 求 $E+A^{-1}$的特征值.

6. 已知 $\alpha=(1,k,1)'$是 $A=\begin{bmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{bmatrix}$的逆阵 A^{-1}的特征向量,试求常数 k 的值.

7. 已知$\sum\limits_{i=1}^{4}a_i=0$,求实对称阵

$$A=\begin{bmatrix}a_1^2+1 & a_1a_2+1 & a_1a_3+1 & a_1a_4+1\\ a_2a_1+1 & a_2^2+1 & a_2a_3+1 & a_2a_4+1\\ a_3a_1+1 & a_3a_2+1 & a_3^2+1 & a_3a_4+1\\ a_4a_1+1 & a_4a_2+1 & a_4a_3+1 & a_4^2+1\end{bmatrix}$$

的全部特征值.

8. 已知线性方程组

(I) $\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+a_{14}x_4=0\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3+a_{24}x_4=0\end{cases}$

的一个基础解系为

$$\xi_1=\begin{bmatrix}b_{11}\\ b_{12}\\ b_{13}\\ b_{14}\end{bmatrix},\qquad \xi_2=\begin{bmatrix}b_{21}\\ b_{22}\\ b_{23}\\ b_{24}\end{bmatrix},$$

试求线性方程组

(II) $\begin{cases}b_{11}y_1+b_{12}y_2+b_{13}y_3+b_{14}y_4=0\\ b_{21}y_1+b_{22}y_2+b_{23}y_3+b_{24}y_4=0\end{cases}$

的通解.

9. 已知$\sum\limits_{i=1}^{4}a_i=0$,解方程

$$\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3 & a_4+x\\ a_1 & a_2 & a_3+x & a_4\\ a_1 & a_2+x & a_3 & a_4\\ a_1+x & a_2 & a_3 & a_4\end{vmatrix}=0.$$

10. 设 $A=\begin{bmatrix}3 & 2 & -2\\ -k & -1 & k\\ 4 & 2 & -3\end{bmatrix}$. 问当 k 为何值时,存在可逆阵 P,使得 $P^{-1}AP$ 为对角阵,并求出一个 P 及相应的对角阵 Λ.

11. 设 $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$,方阵 B 满足 $AB+E=A^2+B$,求 B.

12. 已知将 3 阶可逆阵 A 的第 2 行的 2 倍加到第 3 行得矩阵 B,求 AB^{-1}.

13. 设有线性方程组(a,b 不全为 0)

$$\begin{cases}ax_1+bx_2+bx_3=0\\bx_1+ax_2+bx_3=0\\bx_1+bx_2+ax_3=0.\end{cases}$$

(1) a、b 为何值时方程组有非零解;

(2) 写出相应的基础解系及通解;

(3) 求解空间的维数.

14. 设二次型 $f=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2ax_1x_2+2bx_2x_3+2x_1x_3$ 经正交变换 $X=PY$ 化成 $f=y_2^2+2y_3^2$,其中 $X=(x_1,x_2,x_3)^T$,$Y=(y_1,y_2,y_3)^T$,P 是 3 阶正交矩阵,求 a、b,及满足上述条件的一个 P.

15. 求直线 L_1:$\begin{cases}x+y-z-1=0\\2x+y-z-2=0\end{cases}$ 与 L_2:$\begin{cases}x+2y-z-2=0\\x+2y+2z+4=0\end{cases}$ 的公垂线方程.

16. 求直线 L:$\begin{cases}2x-y+z-1=0\\x+y-z+1=0\end{cases}$ 在平面 π:$x+2y-z=0$ 上投影的方程.

17. 设矩阵 A 与 B 相似,且

$$A=\begin{bmatrix}1&-1&1\\2&4&-2\\-3&-3&a\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&b\end{bmatrix}.$$

(1) 求 a,b 的值;

(2) 求一个可逆阵 P 使 $P^{-1}AP=B$.

18. 已知 3 阶实对称阵 A 的特征值为 3,2,-2,$\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$ 及 $\begin{bmatrix}\sqrt{3}\\0\\1\end{bmatrix}$ 分别是 A 的对应于特征值 3,2 的特征向量.

(1) 求 A 的属于特征值 -2 的一个特征向量.

(2) 求正交变换 $X=PY$ 将二次型 $f=X'AX$ 化为标准形.

19. 已知二次型 $f=5x_1^2+5x_2^2+cx_3^2-2x_1x_2+6x_1x_3-6x_2x_3$ 的秩为 2,求 c 及此二次型对应矩阵的特征值,指出 $f(x_1,x_2,x_3)=1$ 代表三维几何空间中何种几何曲面.

20. 设有数列 $a_0=0,a_1=1,a_2=a_0+a_1,a_3=a_2+a_1,\cdots,a_n=a_{n-1}+a_{n-2},\cdots$,求 a_{1000}.

四、证明题

1. 证明

$$D_n=\begin{vmatrix}6&9&&&&\\1&6&9&&&\\&1&6&9&&\\&&\ddots&\ddots&\ddots&\\&&&1&6&9\\&&&&1&6\end{vmatrix}=(n+1)3^n\quad(n\text{ 为自然数}).$$

2. 设 A 为 2 阶方阵,证明:若存在大于等于 2 的自然数 m 使 $A^m=0$,则 $A^2=0$.

3. 若 A,B 为 n 阶矩阵,证明:若 $E-AB$ 可逆,则 $E-BA$ 也可逆.

4. 设 A,B 是 n 阶正定矩阵,证明 AB 的特征值全大于 0.

5. 设 A 为 n 阶方阵,试证:

(1) 若 $A^{k+1}\alpha=0$ 且 $A^k\alpha\neq0$,则 $A^k\alpha,A^{k-1}\alpha,\cdots,A\alpha,\alpha$ 线性无关;

(2) $A^{n+1}x=0$ 的解一定是 $A^nx=0$ 的解;

(3) $R(A^{n+1})=R(A^n)$.

6. 已知向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m(m\geqslant2)$ 线性无关,试证向量组 $\beta_1=\alpha_1+k_1\alpha_m,\beta_2=\alpha_2+k_2\alpha_m,\cdots,\beta_{m-1}=\alpha_{m-1}+k_{m-1}\alpha_m,\beta_m=\alpha_m$ 线性无关.

7. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关,m 为奇数,试证 $\beta_1=\alpha_1+\alpha_2,\beta_2=\alpha_2+\alpha_3,\cdots,\beta_{m-1}=\alpha_{m-1}+\alpha_m,\beta_m=\alpha_m+\alpha_1$ 线性无关.

8. 设 n 阶矩阵 A 的 n 个列向量为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$,$n$ 阶矩阵 B 的 n 个列向量为 $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\cdots,\alpha_{n-1}+\alpha_n,\alpha_n+\alpha_1$,$R(A)=n$. 问齐次线性方程组 $BX=0$ 是否有非零解,证明你的结论.

9. 设 n 阶方阵 A 有 n 个互不相同的特征值,则存在 α 使 $\alpha,A\alpha,A^2\alpha,\cdots,A^{n-1}\alpha$ 线性无关.

10. 设 A 为实对称矩阵,$A^2=0$,则 $A=0$.

11. 设 A 是 n 阶实矩阵,证明当 $k>0$ 时,$kE+A'A$ 正定.

12. 设 A 是 $m\times n$ 实矩阵,证明:$R(A'A)=R(AA')=R(A)$. 并举例说明 A 是复矩阵时,结论未必成立.

13. 若任意 n 维列向量都是 n 阶方阵 A 的特征向量,试证 A 一定是数量阵.

14. 设 A 是 n 阶正定矩阵,试证:存在正定矩阵 B 使 $A=B^2$.

15. 设 α 是 n 维非零实列向量,证明 $E-\dfrac{2}{\alpha'\alpha}\alpha\alpha'$ 为正交矩阵.

16. 设方程组 $AX=0$ 的解都是 $BX=0$ 的解,且 $R(A)=R(B)$,试证 $AX=0$ 与 $BX=0$ 同解.

17. 设 A 是 n 阶方阵,$\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)'$ 是 n 维列向量 $B=\begin{bmatrix}A & \beta\\ \beta' & 0\end{bmatrix}$,若 $R(A)=R(B)$,则 $AX=\beta$ 有解.

18. 设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 是三个不共面的几何向量,$\boldsymbol{d}\in R^3$ 使

$$\boldsymbol{d}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}+z\boldsymbol{c},x,y,z\in R.$$

试证:$x=\dfrac{[\boldsymbol{dbc}]}{[\boldsymbol{abc}]},y=\dfrac{[\boldsymbol{adc}]}{[\boldsymbol{abc}]},z=\dfrac{[\boldsymbol{abd}]}{[\boldsymbol{abc}]}$.

19. 设 A、B 是两个 n 阶正定矩阵,若 A 的特征向量都是 B 的特征向量,则 AB 正定.

20. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t$ 是齐次线性方程组 $AX=0$ 的基础解系,向量 β 不是 $AX=0$ 的解,试证向量组 $\beta,\beta+\alpha_1,\beta+\alpha_2,\cdots,\beta+\alpha_t$ 线性无关.

习题参考答案

习　题　一

1. (1) 3;　(2) $\frac{1}{2}n(n-1)$;
   (3) $i=8, j=3$;　(4) $i=3, j=6$.
2. (1) $117(a^2-4b^2)$;　(2) 4313100;
   (3) 0;　(4) $4abcdef$.
3. (1) 2;　(2) 1.
4. (1) 120;　(2) $(-1)^{n-1}n!$.
6. (1) $abcd$;　(2) -9;
   (3) $(x-a)^{n-1}$;$[x+(n-1)a]$;　(4) $\frac{1}{2}n(n+1)$;
   (5) a^n-a^{n-2};　(6) $(-2)^{n-1}$.
8. (1) $x_1=-1, x_2=1, x_3=3$;　(2) $x_1=a, x_2=b$.
9. (1) $x_1=-25, x_2=34$;　(2) $x_1=\frac{19}{65}, x_2=-\frac{1}{13}, x_3=\frac{1}{65}$.
11. $x^4(x+1)$.

习　题　二

1. (1) $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 8 \end{bmatrix}$;　(2) $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -7 & 2 \end{bmatrix}$;
   (3) $\begin{bmatrix} 18 & 18 \\ 37 & 10 \end{bmatrix}$.
2. $\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}'$.
3. (1) $\begin{bmatrix} 35 \\ 6 \\ 49 \end{bmatrix}$;　(2) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 12 & 8 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$;
   (3) (16);　(4) $\begin{bmatrix} 13 & 6 \\ -1 & 2 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$;

(5) $\begin{bmatrix} k_1a_{11} & k_1a_{12} \\ k_2a_{21} & k_2a_{22} \\ k_3a_{31} & k_3a_{32} \end{bmatrix}$；

(6) $\begin{bmatrix} k_1a_{11} & k_2a_{12} & k_3a_{13} \\ k_1a_{21} & k_2a_{21} & k_3a_{23} \end{bmatrix}$；

(7) $\begin{bmatrix} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3 \end{bmatrix}$；

(8) $\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}a_{ij}x_ix_j$.

5. (1) $\begin{bmatrix} k_1^n & & \\ & k_2^n & \\ & & k_3^n \end{bmatrix}$；

(2) $\begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$；

(3) $\begin{cases} \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & n=1\text{ 时}, \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & ac \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & n=2\text{ 时}, \\ 0_{3\times 3} & n\geqslant 3\text{ 时}; \end{cases}$

(4) $\begin{bmatrix} 1 & na & \frac{n(n-1)}{2}a^2 \\ 0 & 1 & na \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$；

(5) $\begin{cases} t^{2(k-1)}\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}, & n=2k-1\text{ 时}, \\ 5^{2k}E_2, & n=2k\text{ 时}, \end{cases}$

(6) $3^{n-1}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -6 & -3 & -6 \\ 4 & 2 & 4 \end{bmatrix}$.

6. (1) -1；

(2) 1；

(3) 36；

(4) 5^{4n}.

8. (1) $\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -\frac{13}{2} & 3 & -\frac{1}{2} \\ -16 & 7 & -1 \end{bmatrix}$；

(2) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$；

(3) $\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$；

(4) $\begin{bmatrix} 3/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \\ 1/4 & 1/2 & 3/4 \end{bmatrix}$；

(5) $\begin{bmatrix} 5 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/7 & -1/7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$；

(6) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1/a_n \\ 1/a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1/a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1/a_{n-1} & 0 \end{bmatrix}$.

9. (1) $\begin{bmatrix} 2 & -23 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$; (2) $\begin{bmatrix} -2 & 2 & 1 \\ -8/3 & 5 & -2/3 \end{bmatrix}$;

(3) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1/4 & 0 \end{bmatrix}$; (4) $\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$.

10. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

11. $A=A^9=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 6 & -1 & -1 \end{bmatrix}$.

12. $R(A)=3$, $R(B)=2$,

$$R(C)=\begin{cases} 1, \text{当 } x=2 \text{ 且 } y=6 \text{ 时} \\ 2, \text{当 } x=2 \text{ 且 } y\neq 6 \text{ 时} \\ 2, \text{当 } x\neq 2 \text{ 且 } y=6 \text{ 时} \\ 3, \text{当 } x\neq 2 \text{ 且 } y\neq 6 \text{ 时,} \end{cases} \quad R(D)=\begin{cases} 2, \text{当 } a+b+c=0 \text{ 时} \\ 3, \text{当 } a+b+c\neq 0 \text{ 时.} \end{cases}$$

13. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$.

15. (1) $\begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$; (2) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

16. $-\frac{1}{a_0}(A^{m-1}+a_{m-1}A^{m-2}+\cdots+a_2A+a_1E)$.

22. $2^n\begin{bmatrix} \cos\frac{n\pi}{3} & -\sin\frac{n\pi}{3} \\ \sin\frac{n\pi}{3} & \cos\frac{n\pi}{3} \end{bmatrix}$.

23. $\begin{bmatrix} 5^{2n} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5^{2n} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3}(4^n-1) \\ 0 & 0 & 0 & 4^n \end{bmatrix}$.

26. (1) 16; (2) 16;

(3) 2; (4) $\frac{1}{16}$.

27. 40.

30. $(-1)^{mn}a$.

习 题 三

1. $\mathbf{0}$.

2. $\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}),\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}),\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}),-\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$.

4. $2.5\sqrt{3}$.

8. $-\frac{3}{2}$.

9. (1) 平行； (2) $0,28,\arccos\frac{14}{\sqrt{266}}$；

   (3) $(-3,6,5),0$； (4) $\arccos 1=0$.

10. (1) 3； (2) $\frac{1}{6}$.

12. $\left[\frac{2}{3},\frac{1}{3},-\frac{2}{3}\right]$.

13. $\boldsymbol{i}+\boldsymbol{k}$ 或者 $-\frac{1}{3}\boldsymbol{i}+\frac{4}{3}\boldsymbol{j}-\frac{1}{3}\boldsymbol{k}$.

14. 4.

15. $3x-7y+5z-4=0$.

16. $x+y-3z-4=0$.

17. (1) yOz 坐标面； (2) 平行于 xOz 面的平面； (3) 平行于 x 轴的平面；
    (4) 通过 y 轴的平面； (5) 通过原点的平面.

18. $\frac{x-4}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-3}{5}$.

19. $\frac{x-1}{-2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{3}$； $\begin{cases}x=1-2t\\y=1+t\\z=1+3t.\end{cases}$

20. $16x-14y-11z-65=0$.

21. $x-y+z=0$.

22. $\frac{x+1}{1}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z-3}{1}$.

23. $x-3y+z+2=0$.

24. $\pi-\arccos\frac{16}{21}$.

25. 是，是，$(0,-3,0)$.

26. (1) $4,-1$； (2) $n-m=4$，不唯一； (3) $mn+2m-4n-8=0$，不唯一；
    (4) $\varphi=\arccos\frac{1}{9}$.

27. (1) $n=2$； (2) $n=-\frac{5}{2}$； (3) $\arcsin\frac{1}{9}$； (4) $(-8,18,-20)$.

28. $x-z=4$.

29. (1) 平行； (2) 垂直； (3) 直线在平面上.

30. $\left[-\frac{5}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right]$.

31. $\begin{cases}17x+31y-37z-117=0\\4x-y+z-1=0.\end{cases}$

32. $(3,3,3)$, $\sqrt{2}$.

33. $\begin{cases}x+3z-5=0\\7x-13y-5z-22=0.\end{cases}$

34. $x+2y+1=0$.

习 题 四

1. $(-1,-15,-13,-10)'$.

4. (1) 线性相关； (2) 线性相关；
   (3) 线性无关； (4) 线性相关；
   (5) 线性无关； (6) 线性相关．

5. (1) ×； (2) ×；
   (3) √； (4) ×；
   (5) √； (6) ×；
   (7) ×； (8) ×.

13. $a\neq1$ 且 $a\neq1-n$.

15. (1) 3； (2) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$(不唯一)；
   (3) $\alpha_4=\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3,\alpha_5=\frac{1}{2}\alpha_1-\frac{1}{2}\alpha_2+\frac{1}{2}\alpha_3$.

18. V_1 是，V_2 不是．

19. (2) $\begin{bmatrix}-27&-71&-41\\9&20&9\\4&12&8\end{bmatrix}$；
   (3) $(1,1,-1)$，$\left[-\frac{53}{4},\frac{19}{2},-\frac{31}{4}\right]$.

29. 3.

30. $\begin{bmatrix}\sqrt{2}/2\\\sqrt{2}/2\\0\\0\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}\sqrt{10}/10\\-\sqrt{10}/10\\\sqrt{10}/5\\\sqrt{10}/5\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}-\sqrt{10}/5\\\sqrt{10}/5\\\sqrt{10}/10\\\sqrt{10}/10\end{bmatrix}$.

习 题 五

1. (1) 有唯一解； (2) 无解；
   (3) 有无穷多解； (4) 无解．

3. (1) $\begin{bmatrix}0\\1\\1\\-1\end{bmatrix}$;　　(2) $k\begin{bmatrix}0\\1\\1\\-1\end{bmatrix}+\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\9\\9\\4\end{bmatrix}$，$k$ 为任意常数.

4. (1) $a=-1$ 且 $b\neq 0$；　　(2) $a\neq -1$.

5. $a=\pm 1$.

6. (1) $k\begin{bmatrix}4\\-9\\4\\3\end{bmatrix}$，$k$ 为任意常数；　　(2) $k\begin{bmatrix}1\\-1\\-1\\2\end{bmatrix}$，$k$ 为任意常数；

(3) $k_1\begin{bmatrix}-2\\-5\\9\\0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}1\\-2\\0\\9\end{bmatrix}$，$k_1,k_2$ 为任意常数；

(4) $k_1\begin{bmatrix}8\\-6\\1\\0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}-7\\5\\0\\1\end{bmatrix}$，$k_1,k_2$ 为任意常数.

7. (1) $k_1\begin{bmatrix}-1\\2\\0\\0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}1\\0\\2\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix}$，$k_1,k_2$ 为任意常数；

(2) $k\begin{bmatrix}1\\5\\7\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix}$，$k$ 为任意常数；

(3) $\begin{bmatrix}0\\0\\2\\0\end{bmatrix}+k\begin{bmatrix}-4\\0\\1\\5\end{bmatrix}$，$k$ 为任意常数；　　(4) $k\begin{bmatrix}3\\0\\5\\7\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}7\\0\\10\\14\\0\end{bmatrix}$，$k$ 为任意常数.

8. $a_1+a_2+a_3=0$ 时有解，$k\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}a_1\\0\\-a_2\end{bmatrix}$，$k$ 为任意常数.

9. $a\neq 1$ 且 $a\neq -2$ 时有唯一解，$x_1=x_2=x_3=\frac{1}{a+2}$；

$a=1$ 时有无穷多解，$k_1\begin{bmatrix}-1\\0\\0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$，$k_1,k_2$ 为任意常数；

$a=-2$ 时无解.

16. 当 $a-2b+c=0$ 时，三条直线交于一点，当 $a-2b+c\neq 0$ 时，三条直线两两相交，但没有公共交点．

习 题 六

1. (1) 2,2,2, $k_1\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$, k_1,k_2 不全为零；

   (2) 2,3, $k_1\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$, $k_2\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}$, $k_1\neq 0, k_2\neq 0$.

2. $1, 1-2i, 1+2i$, $\begin{bmatrix}2\\1\\-2\end{bmatrix}$.

4. (1) $P=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1&-2&2\\2&-1&-2\\2&2&1\end{bmatrix}$； $P^{-1}AP=\begin{bmatrix}-2&&\\&1&\\&&4\end{bmatrix}$；

   (2) $P=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}2&-2&-1\\1&2&-2\\2&1&2\end{bmatrix}$； $P^{-1}AP=\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&10\end{bmatrix}$.

9. $x=1$, $y=-1$.

10. $A=\begin{bmatrix}0&1&-1\\0&1&-2\\0&0&-1\end{bmatrix}$, $A^{2n}=\begin{bmatrix}0&1&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$, $n=1,2,\cdots$.

11. $A=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}&0&-\frac{2}{3}&-\frac{2}{3}\\0&\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&-\frac{2}{3}\\-\frac{2}{3}&\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}&0\\-\frac{2}{3}&-\frac{2}{3}&0&-\frac{1}{3}\end{bmatrix}$,

    $A^{2n}=E_n$.

12. (1) $|\lambda E-A|=(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda+1)$； (2) $1,2,-1$；

    (3) -2； (4) 2；

    (5) 3.

13. (1) $-4,-6,12$, $\Lambda=\begin{bmatrix}-4&&\\&-6&\\&&12\end{bmatrix}$；

    (2) $-1,1,-\frac{1}{2}$； (3) 288, $\frac{1}{2}$.

15. $x_n=\frac{1}{\sqrt{5}}(1-3\times\frac{\sqrt{5}-1}{2})(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n-1}+\frac{1}{\sqrt{5}}(-1-3\times\frac{\sqrt{5}-1}{2})\times(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n-1}$，　$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

16. 约540万.

习 题 七

1. $\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$，(不唯一).

3. $(6,-5,1)$.

5. (1) $\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&2\\0&0&1\end{bmatrix}$；　(2) $1,x-1,x^2-x+2$.

6. (1) 当 $\alpha_0=0$ 时，$\mathscr{A}$ 是线性变换；
   当 $\alpha_0\neq0$ 时，$\mathscr{A}$ 不是线性变换.
   (2) 是；　(3) 是.

7. (1) 将 xOy 上的点映成关于 y 轴对称的点；
   (2) 将 xOy 上的点投影到 x 轴上；
   (3) 将 xOy 上的点映成关于直线 $y=x$ 对称的点；
   (4) 将 xOy 上的点先映成关于 y 轴对称的点，再映成关于直线 $y=x$ 对称的点(或顺时针方向旋转 90°).

9. (1) $\begin{bmatrix}3&-3&-2\\2&0&-1\\-3&4&3\end{bmatrix}$；　(2) $\begin{bmatrix}\frac{46}{7}&\frac{29}{7}&-\frac{69}{7}\\-\frac{29}{7}&-\frac{9}{7}&\frac{47}{7}\\\frac{-1}{7}&-\frac{2}{7}&\frac{5}{7}\end{bmatrix}$.

10. $\begin{bmatrix}1&3&6\\-2&-1&0\\1&0&2\end{bmatrix}$.

11. (1) $\begin{cases}x_1=-7y_1-4y_2+9y_3\\x_2=6y_1+3y_2-7y_3\\x_3=3y_1+2y_2-4y_3\end{cases}$；　(2) $\begin{cases}x_1=\frac{1}{3}y_1+\frac{1}{3}y_3,\\x_2=\frac{1}{3}y_2-\frac{2}{3}y_3,\\x_3=-\frac{1}{3}y_1+\frac{1}{3}y_2.\end{cases}$

习 题 八

1. (1) $f=(x,y,z)\begin{bmatrix}1&2&1\\2&4&2\\1&2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}, R(f)=1$;

(2) $f=(x,y,z)\begin{bmatrix}1&-1&-2\\-1&1&-2\\-2&-2&-7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}, R(f)=3$;

(3) $f=(x_1,x_2,x_3,x_4)\begin{bmatrix}1&-1&2&-1\\-1&1&3&-2\\2&3&1&0\\-1&-2&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}, R(f)=4.$

2. (1) $f=y_1^2-4y_2^2+9y_3^2$,

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-3&-\frac{5}{2}\\0&1&\frac{3}{2}\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z_1\\z_2\\z_3\end{bmatrix}.$$

(2) $f=z_1^2-z_2^2-z_3^2$,

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&-1\\1&-1&-1\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z_1\\z_2\\z_3\end{bmatrix}.$$

3. (1) $4y_1^2-4y_2^2+y_4^2$,

$$C=\begin{bmatrix}1&0&0&\frac{1}{2}\\0&1&-\frac{3}{2}&-1\\0&0&1&0\\0&1&-\frac{1}{2}&0\end{bmatrix}$$ (不唯一);

(2) $y_1^2-y_2^2-y_3^2$,

$$C=\begin{bmatrix}1&-1&-1\\1&1&-1\\0&0&1\end{bmatrix}$$ (不唯一).

4. (1) $f=2y_1^2+2y_2^2+8y_3^2$,

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{2}&-\frac{\sqrt{6}}{6}&\frac{\sqrt{3}}{3}\\\frac{\sqrt{2}}{2}&-\frac{\sqrt{6}}{6}&\frac{\sqrt{3}}{3}\\0&\frac{\sqrt{6}}{3}&\frac{\sqrt{3}}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix};$$

(2) $f=2y_1^2+y_2^2+5y_3^2$.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}.$$

5. (1) 正定； (2) 正定．

6. (1) $t>2$； (2) $-\sqrt{2}<t<\sqrt{2}$．

10. (1) $\frac{1}{2}(y_1^2+\cdots+y_{n-1}^2)+\frac{n+1}{2}y_n^2$； (2) 正定；

(3) $\frac{1}{4}\begin{bmatrix} \sqrt{6}+\sqrt{2} & \sqrt{6}-\sqrt{2} \\ \sqrt{6}-\sqrt{2} & \sqrt{6}+\sqrt{2} \end{bmatrix}$．

14. (1) 圆，圆柱面； (2) 抛物线，抛物柱面； (3) 直线，平面； (4) 点，直线．

15. $4x^2-9(y^2+z^2)=36$； $4(x^2+z^2)-9y^2=36$.

16. $3y^2-z^2=16$.

17. $\begin{cases} x^2+y^2+(1-x)^2=9 \\ z=0. \end{cases}$

18. $\begin{cases} x=\frac{3}{\sqrt{2}}\cos t \\ y=\frac{3}{\sqrt{2}}\cos t \\ z=3\sin t \end{cases} \quad 0\leqslant t\leqslant 2\pi.$

19. $\begin{cases} x^2+y^2=a^2 \\ z=0; \end{cases}$ $\begin{cases} z=b\arcsin\frac{y}{a} \\ x=0; \end{cases}$ $\begin{cases} z=b\arccos\frac{x}{a}, \\ y=0. \end{cases}$

20. $x^2+y^2\leqslant 4$； $x^2\leqslant z\leqslant 4$； $y^2\leqslant z\leqslant 4$.

21. $x^2+y^2-z^2-1=0$.

22. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$.

23. 曲线$\begin{cases} \frac{1}{2}y^2-x=0 \\ z=0 \end{cases}$ 绕 Ox 轴旋转得到．

24. (1) 椭球面； (2) 椭圆抛物面； (3)单叶双曲面； (4) 椭圆抛物面； (5) 双叶双曲面； (6) 圆锥面； (7) 二次锥面； (8) 马鞍面．

25. (1) 圆； (2) 椭圆； (3) 双曲线； (4) 抛物线； (5) 双曲线．

27. 特征值为 0，4，9，椭圆柱面．

28. 特征值为 6，−3，−3，标准方程为$\frac{\bar{x}_1^2}{\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\right]^2}-\frac{\bar{x}_2^2}{1}-\frac{\bar{x}_3^2}{1}=1$.

综合练习 100 题参考答案

一、填空题

1. 0.

2. 0.

3. 0.

4. 0.

5. 0.

6. E.

7. E.

8. -3^{n-1}.

9. $n-1$.

10. 2.

11. $\begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

12. $(-1)^{mn}ab$.

13. 0.

14. 100.

15. 当 $a=-4$ 时，$R(A)=4$，当 $a\neq-4$ 时，$R(A)=5$.

16. $k(1,1,\cdots,1)'$，k 任意.

17. $n-r$.

18. 0 或 1 或 -1.

19. $a=-3$，$b=0$.

20. $3(\lambda-1)(3\lambda-1)$.

21. $\frac{7^3}{6}$.

22. 0.

23. 0（n 重）.

24. 0.

25. $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1)$.

26. 0.

27. 0.

28. $\frac{\pi}{2}$.

29. $\begin{cases} x=\frac{8}{5}-t \\ y=\frac{11}{5}+3t \\ z=5t. \end{cases}$

30. 3.

二、选择

1. C.

2. C.

3. C.

4. A.

5. C.

6. B.

7. D.

8. D.

9. D.

10. B.

11. C.

12. D.

13. D.

14. B.

15. C.

16. D.

17. B.

18. C.

19. B.

20. D.

21. C.

22. C.

23. D.

24. C.

25. D.

26. B.

27. C.

28. D.

29. C.

30. A.

三、计算

1. 2^8A.　　2. (1) $a\neq 2bc$. (2) $a=1,b=c=0$. (3) $a=\frac{1}{2},b=-\frac{\sqrt{3}}{2},c=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

3. (1) $\lambda\neq 0$ 且 $\lambda\neq -3$. (2) $\lambda=0$. (3) $\lambda=-3$.

4. $(2-2^{n+1}+3^n,2-2^{n+2}+3^{n+1},2-2^{n+3}+3^{n+2})'$.

5. (1) $1,1,-5$. (2) $2,2,\frac{4}{5}$.　　6. 1 或 -2.

7. 0(2 重), $4,\sum_{i=1}^{4}a_i^2$.　　8. $k_1(a_{11},a_{12},a_{13},a_{14})'+k_2(a_{21},a_{22},a_{23},a_{24})'$.

9. $x_1=x_2=x_3=0,x_4=-1$.

10. $k=0,P=\begin{bmatrix}-1&1&1\\2&0&0\\0&2&1\end{bmatrix},\Lambda=\begin{bmatrix}-1&&\\&-1&\\&&1\end{bmatrix}$.

11. $\begin{bmatrix}2&0&1\\0&3&0\\1&0&2\end{bmatrix}$.　　12. $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-2&1\end{bmatrix}$.

13. (1) $a=b\neq 0$ 时,或 $b=-2a\neq 0$ 时,方程组有非零解.

(2) $a=b\neq 0$ 时, $\xi_1=\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix},\xi_2=\begin{bmatrix}0\\-1\\1\end{bmatrix}$ 为基础解系, $k_1\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}0\\-1\\1\end{bmatrix}$, k_1,k_2 为任意常数.

$b=-2a\neq 0$ 时, $\zeta=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$ 为基础解系, $k\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$, k 为任意常数.

(3) $a=b\neq 0$ 时,2 维; $b=-2a\neq 0$ 时,1 维.

14. $a=0,b=0,P=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}&0&\frac{\sqrt{2}}{2}\\0&1&0\\-\frac{\sqrt{2}}{2}&0&\frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}$.

15. $\frac{x-1}{1}=\frac{y+\frac{4}{3}}{2}=\frac{z+\frac{4}{3}}{-2}$.

16. $\begin{cases}3x-y+z-1=0\\x+2y-z=0.\end{cases}$

17. $a=5,b=6$. $P=\begin{bmatrix}1&1&1\\-1&0&-2\\0&1&3\end{bmatrix}$.

18. (1) $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -\sqrt{3} \end{bmatrix}$；　(2) $P=\begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$，$f=3y_1^2+2y_2^2-2y_3^2$.

19. $c=3$，特征值为 0，9，4. 代表椭圆柱面.

20. $\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{1000}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{1000}\right]$. 提示：$\begin{bmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{n-1} \\ a_{n-2} \end{bmatrix}$，

$\begin{bmatrix} a_{1000} \\ a_{999} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{999}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

四、证明提示

4. $A=P'P, B=Q'Q, AB=Q^{-1}(PQ')'(PQ')Q$.

9. $P^{-1}AP=\begin{bmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{bmatrix}$. $\alpha=P\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$. $P^{-1}(\alpha, A\alpha, A^2\alpha, \cdots, A^n\alpha)=$

$\begin{bmatrix} 1 & a_1 & \cdots & a^{n-1} \\ 1 & a_2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & \cdots & a_n^{n-1} \end{bmatrix}$. 利用 Vandermonde 行列式.

19. 记 $P_1, P_2, \cdots, P_n$ 为 A 的 n 个标准正交的特征向量，$P=(P_1, P_2, \cdots, P_n)$. 则

$$P^{-1}AP=\begin{bmatrix} \lambda & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}, \quad P^{-1}BP=\begin{bmatrix} k_1 & & & \\ & k_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & k_n \end{bmatrix}.$$

$$P^{-1}ABP=\begin{bmatrix} \lambda_1 k_1 & & & \\ & \lambda_2 k_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n k_n \end{bmatrix}, \quad \lambda_i k_i>0.$$

由 $P^{-1}=P'$ 知 $(AB)'=AB$.

英汉词汇索引